

ANÁLISE FUNCIONAL

1ª parte: espaços localmente convexos

Lições do

PROF. J. SANTOS
GUERREIRO

Mestrado em Matemática Aplicada,
IST, 1986

**Mestrado
em
Matemática Aplicada**



Professor J. Santos Guerreiro

1. ESPAÇOS LOCALMENTE CONVEXOS.

1.1. ESPAÇOS VECORIAIS TOPOLÓGICOS A. Todo o espaço vetorial que vamos considerar será tomado sobre um corpo de escalares $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Chama-se espaço vetorial topológico, abreviatura e.v.t., a um espaço vetorial E munido de uma topologia tal que as aplicações $(x, y) \rightarrow x+y$ de $E \times E$ em E e $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ de $K \times E$ em E (K com a sua topologia natural) são contínuas. Em particular, as translações de E , $x \rightarrow a+x$ e as homotetias $x \rightarrow \lambda x$ de razão $\lambda \neq 0$ são homeomorfismos de E sobre E .

Como as translações são homeomorfismos, a topologia de E é determinada pelo filtro $\mathcal{U}_0$ das vizinhanças de zero; para cada $a \in E$, $a + \mathcal{U}_0 = \{a + U : U \in \mathcal{U}_0\}$ é o filtro das vizinhanças de a . Uma rede x_j de pontos de E converge para um ponto a se $x_j - a \rightarrow 0$.

1.1.1. TEOR. Tem-se, em qualquer e.v.t. E :

(a) para qualquer vizinhança U de zero, existe uma vizinhança W de zero tal que $W+W \subset U$.

(b) toda a vizinhança U de zero é absorvente, isto é, para

cada $x \in E$ existe $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda U$, $\forall \lambda \geq \lambda_0$.

(c) toda a vizinhança U de zero contém uma vizinhança W de zero
equilibrada, isto é, $\lambda W \subset W$, para qualquer $\lambda \in K$
tal que $|\lambda| \leq 1$.

(d) toda a vizinhança de zero contém uma vizinhança de zero
fechada.

DEM (a) resulta imediatamente da continuidade da adição $x+y$ no ponto $(0,0)$ e (b) de continuidade da aplicação $\lambda \rightarrow \lambda x$ de K em E , para $\lambda \neq 0$. (c) : Como a multiplicação $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$

é contínua, para cada vizinhança U de zero existe uma vizinhança

(2.º)
 V de zero e um número $\delta > 0$ tais que $x \in V \subset U$, para $|x| \leq \delta$. Como
 conjunto $W = \bigcup \{xV : |x| \leq \delta\}$ é equilibrado e é vizinhança de zero
 contida em U . (d): em virtude de (a) e (c), se U é vizinhança de zero
 existe uma vizinhança w de zero equilibrada tal que $w + w \subset U$. Mas
 isto implica $\overline{w} \subset U$. Com efeito, se $x \in \overline{w}$, tem-se $(x + w) \cap w \neq \emptyset$
 e, portanto, $x \in w + w$, mas, como w é equilibrado, $w = -w$, donde
 $x \in w + w \subset U$. e. s. d.

E' fácil ver que se um componente A num $\mathcal{L}$ e.v.t. $\mathcal{L}'$ equilibrado, $\bar{A}$ e' também equilibrado. Assim de $\mathcal{L}(b)$ e $\mathcal{H}$ resulta:

• COROL. 1. Não é v.t. qualquer E existe um sistema paralelamente
de argumentações de 3^{ra} equilibradas e fechadas.

Recordemos, por outro lado, que um espaço topológico se diz regular se qualquer ponto do espaço tem um sistema fundamental de vizinhanças fechadas e que um tal espaço é separado se e só se o conjunto reduzido a um ponto é fechado. Tem-se, assim:

• Corol 2: Todo o e.v.t x regular. Um e.v.t x separável se e
apenas se $\{0\}$ é fechado.

B. EXEMPLOS ① Se E é um e.r.t. sobre o subespaço vetorial de E com a topologia induzida é um e.r.t.

com a topologia induzida e norma.

②. Recordemos que uma norma sobre um espaço vetorial E é uma função real não negativa $x \mapsto \|x\|$ definida em E tal que: (1) $\|x\| = 0$ sse $x = 0$; (2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ e $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$ e $\forall \lambda \in K$. Uma norma $\|x\|$ sobre E determina uma distância $d(x, y) = \|x - y\|$ e, portanto, uma topologia: para cada $a \in E$, as bolas $D(a, p) = \{x \in E : \|x - a\| \leq p\}$ de centro a e raio $p > 0$ constituem um sistema fundamental de vizinhanças de a . É um exercício simples

Se E e F são e.v.t., chama-se isomorfismo vetorial topológico ou simplesmente isomorfismo de E sobre F a qualquer bijeção linear $f: E \rightarrow F$ tal que f e f^{-1} são contínuas; e' ao mesmo tempo isomorfismo algébrico e isomorfismo topológico (ou seja homeomorfismo).

1.1.3. TEOR. Toda o e.v.t. separável E de dimensão finita n é isomorfo a K^n ; mais precisamente, toda o isomorfismo algébrico $h: K^n \rightarrow E$ é isomorfismo topológico.

DEM. (a). h é de um modo geral qualquer aplicação linear de K^n num e.v.t. e' contínuo, pois exprime-se na base canónica de K^n de seguinte modo: $h(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j) = \sum_{j=1}^n \xi_j h(e_j)$.

(b). vejamos que h^{-1} é também contínuo. Por continuidade de h , vamos supor E identificado algébricamente com K^n por meio de h . Nestas condições, tendo em conta 1.1.2, basta provar que, para qualquer $p > 0$, a bola de K^n , $B(0, p) = \{x: \|x\| \leq p\}$ é vizinhança de zero em E . A esfera $S_p = \{x \in K^n: \|x\| = p\}$ é um conjunto compacto em K^n e portanto em E , visto que h é contínuo. Como E é separado, S_p é fechado em E e como $0 \notin S_p$, existe uma vizinhança de zero em E , equilibrada, tal que $U \cap S_p = \emptyset$. Mas isto implica $U \subset B(0, p)$. Com isto se mostrar assim, existe $x \in U$ tal que $\|x\| > p$ e o ponto $\frac{p}{\|x\|} x$ pertence a S_p e a U , o que é absurdo.

Do teorema anterior resulta:

COROLÁRIO. Toda a aplicação linear de um e.v.t E separado e de dimensão finita num e.v.t qualquer F é contínua.

C. QUOTIENTES. SOMAS DIRECTAS. Seja E um e.v.t e H um subespaço vectorial de E . Considere-se o espaço vectorial quociente E/H : os elementos de E/H são as classes de equivalência para a relação $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in H$ ou seja as variedades lineares $x + H$ e a estrutura vectorial é definida pela condição de a aplicação canónica $j: E \rightarrow E/H$, $j(x) = x + H$, ser linear. Em E/H introduz-se a topologia quociente que é a mais fina das topologias que tornam a aplicação j contínua. Esta topologia é caracterizada pela propriedade seguinte: um conjunto $U \subseteq E/H$ é aberto sse $j^{-1}(U)$ é aberto em E .

1.1.4. TEOR. (a) O espaço E/H com a topologia quociente é um e.v.t e a aplicação canónica $j: E \rightarrow E/H$ é aberta;

(b) E/H é separado sse H é fechado.

(c) Uma aplicação linear f de E sobre um e.v.t F é contínua sse o homomorfismo algébrico $\tilde{f}: E/\ker f \rightarrow F$ definido pelo diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ j \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ E/\ker f & & \end{array}$$

é contínua.

DEM. (a). Vejamos que j é aberta. Trata-se de provar que $j^{-1}(U)$ é aberto em E , se U é aberto em E/H .

$f(A)$ é aberto em E/H . Ou: $f^{-1}(f(A)) = A + H = \bigcup \{A + h : h \in H\}$
 é aberto em E (por ser reunião de abertos). Para provar que E/H
 é um e.v.t. basta verificar que as aplicações $(x, y) \rightarrow x + y$ de
 $E/H \times E/H$ em E/H e $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ de $K \times E/H$ em E/H contínuas.
 Com as aplicações abertos $f \times f$ e $\text{id}_K \times f$ produzindo abertos,
 e contínuas $E \times E \rightarrow E/H$ e $K \times E \rightarrow E/H$.

(f). Se E/H é trivial, o conjunto $\bar{0}$ induzido a partir de 0
 em E/H é fechado e, portanto, $H = f^{-1}(\bar{0})$ é fechado em E .
 Inversamente, se H é fechado em E , $\mathcal{P}_E H$ é aberto, e
 $f(\mathcal{P}_E H) = \mathcal{P}_{E/H} \bar{0}$ é aberto em E/H .

(e) Se $\tilde{f}$ é contínua, f é contínua, pois $f = \tilde{f} \circ j$. Inversamente,
 se $\tilde{f}$ é contínua, tomando um aberto A em E , $f^{-1}(A) =$
 $= j^{-1}(\tilde{f}^{-1}(A))$ é aberto em E .

Considere-se agora num e.v.t. E dois subespaços suplementares
 H e L ou seja E é soma direta de H e L . Isto significa que
 a aplicação $s: H \times L \rightarrow E$, $s(x, y) = x + y$, é um isomorfismo
 algébrico. Tomando em H e L as topologias induzidas por
 E , s é contínua, como é óbvio. Se s^{-1} é também contínua,
 o que é equivalente, s é um isomorfismo, digamos E é soma
direta topológica de H e L ou que cada um destes espaços é
 suplementar topológico do outro.

As aplicações $p: E \rightarrow H$, $q: E \rightarrow L$ que resultam de compor
 s^{-1} com as projeções $H \times L \rightarrow H$, $H \times L \rightarrow L$ chamam-se
 também projeções de E sobre H e L respectivamente. Temos

$$H \times L \xrightarrow{s} E \quad H \times L \xrightarrow{p} H \quad H \times L \xrightarrow{q} L$$

Verifica-se facilmente que $\ker q = \text{Im } p = H$ e portanto q induz um isomorfismo algébrico $\tilde{q}: E/H \rightarrow L$ de acordo com o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{q} & L \\ \downarrow p & \nearrow \tilde{q} & \\ E/H & & \end{array}$$

$\forall x$ - a cinda que $\tilde{q}^{-1} = p|_L$ e é transversal contínua.

1.1.5. TEOR. Se E é um e.v.t. e $H \leq L$ são subespaços de E suplementares algébricos sem de outros, são equivalentes:

(a) L é suplementar topológico de H ;

(b) a projeção $q: E \rightarrow L$ é contínua;

(c) $\tilde{q}: E/H \rightarrow L$ é contínua ou o que é equivalente é um isomorfismo de E/H sobre L .

DEM. (a) $\Rightarrow$ (b) é imediato. (b) $\Rightarrow$ (a). $p|_L$ é contínua, p também é contínua, pois que p é lin, $\forall x \in E$, $p(x) = x - q(x)$. Como $q^{-1}(x) = p(x) + q(x)$, q^{-1} é contínua. A equivalência de (b) e (c) é imediata.

D. H = PERPLANOS. FORMAS LINEARES. Seja E um espaço metríco e H um subespaço de E . Chamamos ordenamento de H a dimensão do espaço quociente E/H ; $\text{Ord}(H) = \dim(E/H) = \dim L$; sendo L um suplementar algébrico de H . O subespaço H diz-se um subespaço se $\text{Ord}(H) = 1$ ou seja H o suplementar algébrico é uma recta. Isso quer dizer que para qualquer recta $\ell \notin H$, E é forma recta algébrica $H \oplus \ell$. É fácil ver que um subespaço H de E é lin

superplano se e' elemento maximal no conjunto dos subespaços de E distintos de E obtidos por C.

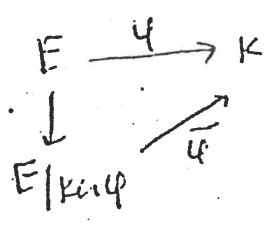
1.1.6. TEOR. Não é v.t. E todo o superplano é denso em relação aos
Facilmente se vê que se H é subespaço próprio de E, o menor espaço contendo H é a sua aderência. Assim se H é superplano, de fato $H \subset \overline{H}$ e como $\overline{H} = H$ ou $\overline{H} = E$.

Recordemos que uma forma linear sobre um espaço vetorial E é uma aplicação linear de E no corpo de escalares K. Os formos lineares sobre E constituem um espaço vetorial (sobre K) que se chama duel a E e se representa por E^* .

1.1.7. TEOR. (a) Se $\varphi \in E^*$ e $\varphi \neq 0$, $\text{Ker } \varphi$ é um superplano de E
(b) Para qualquer superplano H de E existe uma forma linear φ sobre E tal que $H = \text{Ker } \varphi$.

(c) Se $\varphi, \psi \in E^*$ e $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi$, φ e ψ são linearmente dependentes

DEM. (a) $\varphi(E)$ é subespaço próprio não nulo de K; portanto $\varphi(E) = K$, a aplicação $\tilde{\varphi}$ definida pelo diagrama comutativo



é um isomorfismo vetorial de $E/\text{Ker } \varphi$ sobre K e, portanto, $\text{Cod}(\text{Ker } \varphi) = E/\text{Ker } \varphi \cong K$.

(b) se H é superplano de E, E/H é isomorfo a K; a aplicação

canônica $j: E \rightarrow E/H$ combinada com um isomorfismo $E/H \rightarrow K$

de uma forma linear φ tal que $\text{Ker } \varphi = H$. (c) Se $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi = E$, φ e ψ são nulos. Noutro caso, $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi = H$ é um superplano de E.

(d) Considere um vetor $\ell \neq 0$ de E tal que $\ell \notin H$. Como E é espaço denso de H e K, todo elemento $x \in E$ exprime-se

de um único modo: $x = h + \xi \ell$, $h \in H$ e $\xi \in K$. Assim, tem-se

$$\varphi(x) = \xi \varphi(\ell), \quad \psi(x) = \xi \psi(\ell) \quad \text{donde tem} \quad \varphi(x) = \frac{\varphi(\ell)}{\psi(\ell)} \cdot \psi(x).$$

Suponhamos agora que E é um e.v.t. O subespaço de E^* constituído pelas formas lineares contínuas sobre E chama-se dual topológico ou simplesmente dual de E e representa-se por E' . Se E é separável e de dimensão finita ~~se E é de dimensão finita~~ tem-se $E' = E^*$.

1.1.8. TEOR. (a) Uma forma linear φ sobre E é contínua sse $\text{Ker } \varphi$ é fechado em E .

(b) Toda a forma linear φ sobre E é uma aplicação ^{linear} contínua ^{de} E para K .

DEM (a). Basta considerar o caso $\text{Ker } \varphi \neq 0$. Se φ é contínua é óbvio que $\text{Ker } \varphi$ é fechado. Inversamente, se esta condição se verifica, o espaço vectorial $\bar{\varphi}$ (diagrama do Teor. 1.1.7) é contínuo ^{em} $E/\text{Ker } \varphi$ e hereditário e de dimensão 1 e isto implica que φ é contínua. (b) Basta ter em conta que $\bar{\varphi}^{-1}$ é contínua (mesmo se φ não o for).

1.2. CONJUNTOS CONVEXOS E ABSOLUTAMENTE CONVEXOS. ESPAÇOS LOCALMENTE CONVEXOS.

(A) Seja E um espaço vectorial. Se $x, y \in E$, designa-se por $[x, y]$ o segmento de extremos x e y , isto é, o conjunto dos pontos $tx + (1-t)y$ em que $0 \leq t \leq 1$; estes pontos podem-se escrever também com a forma $\alpha x + \beta y$, em que $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$, e chamam-se combinações convexas de x e y . De um modo geral se $x_1, \dots, x_m \in E$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ for números reais ≥ 0 e com soma $\sum \alpha_i = 1$, o ponto $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m$ diz-se uma combinação convexa de $x_1, \dots, x_m$.

Um conjunto $A \subset E$ chama-se convexo se para quaisquer $x, y \in A$

O segmento $[x, y] \subset A$ ou $x \in \alpha x + \beta y \in A$ se $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$. E
 Condição forte- μ , expressa pela relação $\alpha A + \beta A \subset A$, ^{para quaisquer} $\alpha, \beta \geq 0$ ^{com} $\alpha + \beta = 1$.
 ou ainda, $\alpha A + \beta A \subset (\alpha + \beta) A$, para quaisquer $\alpha, \beta \geq 0$.

Se A é convexo; A contém todas as combinações convexas de quaisquer
 pontos $x_1, \dots, x_m \in A$ (se $m=1, 2$, resulta de definições; o caso geral
 estabelece-se facilmente por indução).

Um conjunto $A \subset E$ chama-se absolutamente convexo se é equilátero
 e convexo. Verifica-se facilmente que A é absolutamente convexo se e
 só se $\alpha A + \beta A \subset A$, para quaisquer $\alpha, \beta \in K$ tais que $|\alpha| + |\beta| \leq 1$, ou
 mais explicitamente: A contém com cada par de pontos x, y , as
 combinações $\alpha x + \beta y$ tais que $|\alpha| + |\beta| \leq 1$. ~~Se A é absolutamente convexo, então~~
 ~~A é absolutamente convexo~~

Por indução mostra-se, facilmente, que se A é absolutamente
 convexo, A contém com quaisquer pontos $x_1, \dots, x_m$ todas as
 combinações $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m$ tais que $|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m| \leq 1$, que se
 chamam combinações absolutamente convexas de $x_1, \dots, x_m$.

1.2.1. TEOR. (a). Se A é um conjunto convexo num espaço vetorial
 E e $a \in E$, $a + A$ é convexo.

(b) A imagem directa ou inversa de um conjunto convexo
 (resp. absolutamente convexo) por uma aplicação linear é convexa
 (resp. absolutamente convexa).

(c). Se (A_i) é uma família de conjuntos convexos (resp. absolutamente
 convexos) num espaço vetorial E , $\bigcap A_i$ é família convexa
 (resp. absolutamente convexa).

(d) Se (E_i) é uma família de espaços vetoriais e, para cada i , A_i é
 um conjunto convexo (resp. absolutamente convexo) de E_i , o produto

$\prod_i A_i$ é um conjunto convexo (resp. absolutamente convexo) de espaço produto $\prod_i E_i$.

(b) Se A é um conjunto convexo (resp. absolutamente convexo) num e.n.t., o mesmo acontece com $\bar{A}$.

Todas estas propriedades são fáceis de demonstrar e deixamos como exercício.

Se $M \subseteq E$ chamamos envólucro convexo de M e representamos por $e(M)$ a interseccção de todos os subconjuntos convexos de E que contêm M . Verifica-se facilmente que $e(M)$ é o conjunto de todas as combinações convexas de pontos de M . De modo análogo se define o envólucro absolutamente convexo $ac(M)$ de M : é a interseccção de todos os subconjuntos de E absolutamente convexos que contêm M e é constituído por todas as combinações absolutamente convexas de elementos de M . Se E é um e.n.t. define-se ainda o envólucro convexo (resp. absolutamente convexo) fechado de M como sendo a interseccção de todos os subconjuntos convexos (resp. absolutamente convexos) que contêm M e são fechados. Verifica-se sem dificuldade que é idêntico a $\overline{e(M)}$ (resp. $\overline{ac(M)}$).

EXEMPLOS 1. Se $a_1, \dots, a_m$ são pontos de E (des que $a_1, a_2, \dots, a_m - a_1$ são linearmente independentes), o envólucro convexo de $\{a_1, \dots, a_m\}$ é o m -simplex de vértices $a_1, \dots, a_m$. Se $m=1$ é o segmento de recta $[a_1, a_2]$.

2. Num e.n.t. E todo o conjunto convexo é convexo.

Em particular, em $\mathbb{R}$ qualquer um conjunto é convexo se é um intervalo.

3. Se $A \subseteq B$ então $e(A) \subseteq e(B)$ e $ac(A) \subseteq ac(B)$.

3. Num espaço normado E as bolas fechadas $D(0, p)$ em cada vizinhança da origem são absolutamente convexas (com $x, y \in D(0, p)$ tem x, y háve $|\alpha| + |\beta| \leq 1$, $\|\alpha x + \beta y\| \leq |\alpha| \|x\| + |\beta| \|y\| \leq (|\alpha| + |\beta|) p \leq p$ e portanto $\alpha x + \beta y \in D(0, p)$). De onde conclui-se que as bolas abertas de centro em 0 são absolutamente convexas.

4. Se A, B são conjuntos convexos (resp. absolutamente convexas) num espaço vetorial E , o envoltório convexo (resp. absolutamente convexo) de $A \cup B$ é formado pelas combinações convexas (resp. absolutamente convexas) dos pontos $(x, y) \in A \times B$.

B ESPAÇOS LOCALMENTE CONVEXOS Chama-se espaço localmente convexo, abreviatura e.l.c., a um e.v.t. E tal que a origem tem um sistema fundamental de vizinhanças absolutamente convexas. Verifica-se facilmente que é suficiente admitir que a origem (ou qualquer ponto de E) tem um sistema fundamental de vizinhanças convexas.

EXEMPLOS 1. Todo o espaço normado E (com a topologia dada pela norma) é um e.l.c.

2. Se (E_α) é uma família de e.l.c., o produto

$\prod E_\alpha$ é também um e.l.c. Em particular, se E é um

e.l.c. e x um conjunto qualquer o espaço das funções $f: x \rightarrow E$ com a topologia de convergência simples é um e.l.c.

3. Se E é um e.l.c. e H é subespaço de E ,

E/H é um e.l.c.

4. Todo o subespaço vetorial de um e.l.c. E com a topologia induzida é um e.l.c. Se E é um e.l.c., todo o e.v.t. isomorfo a E é também e.l.c.

Se E é um espaço localmente convexo, a topologia de E diz-se localmente convexa. O teorema que segue dá um processo simples de obter topologias localmente convexas.

1.2.2. TEOR. Seja E um espaço vetorial e $\mathcal{B}$ uma base de filtros sobre E tal que:

1. Todos os membros de $\mathcal{B}$ são absolutamente convexos e absorventes.
2. $\mathcal{B}$ é invariante para as homotetias de razão $\lambda > 0$, isto é:
 $\lambda U \in \mathcal{B}$ e $P > 0$, $P U \in \mathcal{B}$.

Existe então uma topologia localmente convexa τ sobre E tal que $\mathcal{B}$ é sistema fundamental de vizinhanças de zero para τ .

DEM. Se existir uma topologia nestas condições ela é única, pois que, para cada $a \in E$, $a + \mathcal{B} = \{a + U : U \in \mathcal{B}\}$ é sistema fundamental de vizinhanças de a . Para ver que existe, vamos em primeiro lugar que há efectivamente uma topologia τ sobre E tal que, $\forall a \in E$, $a + \mathcal{B}$ é sistema fundamental de vizinhanças de a . Para isso, tendo em conta o modo como $\mathcal{B}$ define uma topologia por meio de vizinhanças, bastará mostrar que, para cada $a \in E$ e cada $U \in \mathcal{B}$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $a + U$ é vizinhança de qualquer $x \in a + W$. Como tomando $W = \frac{1}{2} U$, o que é legítimo em virtude de 2., tem-se imediatamente a que U é convexo:
 $\forall x \in W = a + W + W = a + \frac{1}{2} U + \frac{1}{2} U \subset a + U$. Efectivamente a

topologia τ associada. Teremos agora de provar que a topologia τ assim definida é localmente convexa. Tendo em conta a conclusão 1. bastará provar que E possui de τ e lim e

ou seja que as aplicações $(x, y) \rightarrow x + y$ de $E \times E$ em E e $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ de $K \times E$ em E são contínuas. Para a primeira basta ver que se tem para cada par $(a, b) \in E \times E$ e cada $U \in \mathcal{B}$, $(a + \frac{1}{2}U) + (b + \frac{1}{2}U) \subset (a + b) + U$. Para a segunda basta ver que se uma rede $(\lambda_j, x_j)_{j \in J}$ em $K \times E$ converge para (λ, x) também $\lambda_j x_j \rightarrow \lambda x$ ou $\lambda_j x_j - \lambda x \rightarrow 0$. Tem-se a seguinte identidade de fácil de verificar:

$$\lambda_j x_j - \lambda x = (\lambda_j - \lambda)(x_j - x) + \lambda(x_j - x) + (\lambda_j - \lambda)x.$$

Basta provar que cada um dos três membros tende para zero (note que já provamos que a adição é contínua).

Tome-se $U \in \mathcal{B}$. Como $x_j - x \rightarrow 0$ e $\lambda_j - \lambda \rightarrow 0$, pode-se tomar

$j_0 \in J$ de modo que para $j \geq j_0$, $x_j - x \in U$ e $|\lambda_j - \lambda| \leq 1$, então

Como U é equilibrado, $(\lambda_j - \lambda)(x_j - x) \in U$, para $j \geq j_0$, e, portanto,

$(\lambda_j - \lambda)(x_j - x) \rightarrow 0$. Vejamos que $\lambda(x_j - x) \rightarrow 0$. Tomando $p > |\lambda|$ e

$j_0 \in J$ de modo que, para $j \geq j_0$, $x_j - x \in \frac{1}{p}U$, tem, para estes valores

de j , $\lambda(x_j - x) = \frac{\lambda}{p} p(x_j - x) \in \frac{\lambda}{p}U \subset U$. Resta ver que $(\lambda_j - \lambda)x \rightarrow 0$.

Como U é absorvente, existe $n > 0$ tal que $x \in nU$, então

tomando $j_0 \in J$ pode escolher $|\lambda_j - \lambda| < 1/n$, para $j \geq j_0$, tem

$(\lambda_j - \lambda)x = n(\lambda_j - \lambda) \cdot \frac{1}{n}x \in n(\lambda_j - \lambda)U \subset U$. c.q.d.

1.3. SUBNORMAS E SEMINORMAS.

(A) Seja E um espaço vetorial. Chamamos subnorma sobre E a uma função real não negativa p definida em E com as propriedades:

(S1) (homogeneidade homogênea): $p(px) = p p(x)$, $\forall x \in E$ e $p \geq 0$.

(S2) (subaditividade): $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in E$.

Se em vez de (S1) se assumir o condicador mais forte:

(S'1) (Absolutamente homogêneo): $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\forall x \in E$ e $\forall \lambda \in K$,
 diz-se que p é uma seminorma sobre E . $\forall x \in E$, imediatamente,
 que p é seminorma sse é subnorma e $p(0x) = p(x)$, para qualquer
 $0 \in K$ tal que $|0| = 1$. Tem-se, em particular, $p(-x) = p(x)$; Conclui-se
 do este condicador com (S2) deduz-se facilmente que $p(x-y) \geq |p(x) - p(y)|$
 $\forall x, y \in E$ (esta propriedade não é válida para as subnormas).

Se p é subnorma sobre E de definicao resulta que $p(0) = 0$; se,
 inversamente, $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, diz-se que p é separante. Uma
 subnorma separante é uma norma. Se $a \in E$ e $p > 0$, o conjunto
 $D_p(a, p) = \{x : p(x-a) \leq p\}$ (resp. $B_p(a, p) = \{x : p(x-a) < p\}$)
 é chamado bola fechada (resp. aberta) de centro a e raio p , relativa
 a p . Tem-se $D_p(a, p) = a + D_p(0, p)$ e $D_p(0, p) = p D_p(0, 1)$; se
 $p \leq q$ for subnormas tais que $p \leq q$, $D_q(a, p) \subset D_p(a, p)$. De
 modo análogo para as bolas abertas.

Facilmente se prova que:

2.3.1 TEOR. (2.3.1) Se p é uma subnorma separante (resp. seminorma) sobre
 E as bolas abertas ou fechadas de centros na origem, relativas
a p , são convexas (resp. absolutamente convexas) e absorventes.

(b) Se $p_1, \dots, p_m$ for subnormas (resp. seminormas) sobre E
 as combinações lineares $\lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_m p_m$ de coeficientes $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$
 e $\sup(p_1, \dots, p_m)$ for também subnormas (resp. seminormas) sobre
 E .

Considera-se agora um conjunto $A \subset E$ absorvente, e chama-se função
de Minkowski de A a' funcao $h_A : E \rightarrow \mathbb{R}$ assim definida:

$$h_A(x) = \inf \{ p > 0 : x \in pA \}.$$

1.3.2. TEOR. (a). Se A é convexo (resp. absolutamente convexo) e absorvente, h_A é uma seminorma (resp. seminorma) sobre E que se diz definida em A e tem-se:

$$B_{h_A}(0, 1) \subset A \subset D_{h_A}(0, 1);$$

(b) Se h é seminorma sobre E e A é um conjunto convexo tal que $B_p(0, 1) \subset A \subset D_p(0, 1)$ (portanto, absorvente), tem-se $p = h_A$.

[Destes teoremas resulta que a correspondência $A \rightarrow h_A$ determina uma aplicação da classe dos subconjuntos de E convexos (resp. absolutamente convexos) e absorventes sobre o conjunto das seminormas (resp. seminormas) sobre E . Esta correspondência é injetiva: uma seminorma p é determinada por qualquer conjunto convexo A tal que $B_p(0, 1) \subset A \subset D_p(0, 1)$.

DEF. (a). Suponhamos que A é convexo e absorvente. Se $x, y \in E$, temos, para qualquer $\delta > 0$, sempre existem números $p, p' > 0$ tais que $p \leq h_A(x) + \delta/2$, $p' \leq h_A(y) + \delta/2$ e $x \in pA$, $y \in p'A$; assim, $x+y \in pA + p'A \subset (p+p')A$ donde $h_A(x+y) \leq p+p' \leq h_A(x) + h_A(y) + \delta$. Como δ é arbitrário > 0 , segue-se que $h_A(x+y) \leq h_A(x) + h_A(y)$. Se $\alpha \geq 0$ e se $x \in pA$ em que $p > 0$, então deduz-se $\alpha x \in \alpha pA$, $h_A(\alpha x) \leq \alpha p$ e, portanto, $h_A(\alpha x) \leq \alpha h_A(x)$ e esta é a desigualdade oposta $h_A(\alpha x) \geq \alpha h_A(x)$. Assim h_A é seminorma. Se A é absolutamente convexo, $h_A(\alpha x) = \alpha h_A(x)$. Assim h_A é norma. Se A é absolutamente convexo e $\theta A = A$, onde $|\theta| = 1$, deduz-se imediatamente $h_A(\theta x) = h_A(x)$, e portanto que h_A é seminorma. Tem-se, evidentemente, $A \subset D_{h_A}(0, 1)$. Vejamos que $B_{h_A}(0, 1) \subset A$. Como se $x \in B_{h_A}(0, 1)$ existe um número positivo $\alpha < 1$ tal que $x \in \alpha A$ ou seja $\frac{1}{\alpha}x \in A$; como α pertence ao segmento $[0, \frac{1}{\alpha}]$ e A é convexo, segue-se que $x \in A$.

(b). Se $x \in pA$ em que $p > 0$, então deduz-se $h_A(x) \leq p$; a desigualdade oposta

deduz-se de modo análogo de relação $B_p(0,1) \subset A$.

1.3.2. TEOR. Se E é um e.v.t., para quaisquer subnormas p sobre E são equivalentes:

(a) p é contínua; (b) p é contínua no ponto zero;

(c) $p(x)$ é limitada numa vizinhança de zero.

(d) $B_p(0,1)$ é vizinhança aberta de zero na topologia dada em E .

(e) $D_p(0,1)$ é vizinhança fechada de zero.

DEM. (a) $\Rightarrow$ (b) é imediato. (b) $\Rightarrow$ (a): Se p é contínua no ponto zero, de relação (fácil de estabelecer), $|p(x) - p(a)| \leq \max\{p(x-a), p(a)\}$. deduz-se imediatamente que p é contínua em qualquer $a \in E$. A implicação (b) $\Rightarrow$ (c) é óbvia. (c) $\Rightarrow$ (b): Seja U vizinhança de zero e $M > 0$ tais que $p(x) \leq M, \forall x \in U$. Então, dado $\delta > 0$, tem-se, para cada x da vizinhança $\frac{\delta}{M} U$, $p(x) \leq \delta$, o que é suficiente para garantir a continuidade de p no ponto que $p(x) > 0, \forall x \in E$. Para acabar a demonstração basta agora provar que (a) $\Rightarrow$ (d), (a) $\Rightarrow$ (e) e (e) $\Rightarrow$ (a), que é imediato.

COROL. 1. Uma norma linear φ sobre um e.v.t. é contínua se $|\varphi(x)|$ é limitada numa vizinhança de zero.

Basta ter em conta que $|\varphi(x)|$ é uma subnorma sobre E .

COROL. 2. Se $p \leq q$ são subnormas sobre um e.v.t. E e se existe $p > 0$ tal que $p(x) \leq q(x), \forall x \in E$, então se q é contínua p é contínua.

COROL. 3. Se U é vizinhança de zero convexa num e.v.t. E , a subnorma p_U é contínua em E ; tem-se, além disso,

$$(a) \quad B_{p_U}(0,1) = \bar{U} \text{ e } D_{p_U}(0,1) = U.$$

Em particular, se U é aberta, $U = B_{p_U}(0,1)$, e U é fechada,

$$U = D_{p_U}(0,1)$$

1.3.4. TEOR. Se A um conjunto convexo num. e.v.t. E. Se $a \in \overset{\circ}{A}$ e $b \in \bar{A}$, os pontos do segmento semiaberto $[a, b[= [a, b]$ são todos interiores a A .

COROL. 1. Se A é um corpo, num e.v.t. E , $A \neq 0$ então

$$\overline{A} = \overline{A^0} \quad \text{et} \quad \frac{0}{A} = A^0.$$

2.4. TOPOLOGIAS DEFINIDAS POR SEMINORMAS

Seja E um espaço vetorial e S um conjunto de seminormas sobre E . O conjunto $\mathcal{B}$ formado pelas bolas $D_p(0, p)$ tais que $p \in S$ e $p > 0$ e as suas interseções finitas é uma base

de filtros sobre E que satisfaça as condições 1 e 2 de 1.2.2. Existe então uma topologia localmente convexa τ sobre E , e uma σ tal que β é um sistema fundamental de vizinhanças de zero para τ ; esta topologia diz-se gerada ou definida por S (ou pela seminormas $\in S$). As bolas abertas $B_p(0, P)$, λ qualquer $p \in S$ e $P > 0$, e as suas intersecções finitas constituem também um sistema fundamental de vizinhanças de zero para τ .

{ Em particular, uma seminorma p sobre E determina defini uma topologia localmente convexa: as bolas fechadas $D_p(0, P)$ (também as abertas) constituem um sistema fundamental de vizinhanças de zero.

Inversamente, para qualquer τ l.e. E existe um sistema de seminormas sobre E que gera a sua topologia. Se β é um sistema fundamental de vizinhanças de zero absolutamente convexas, o conjunto das funções de Minkowski p_U das vizinhanças $U \in \beta$ é um sistema destas condições. Com efeito, cada bola $D_{p_U}(0, P)$ é vizinhança de zero em E ($\text{por } D_{p_U}(0, P) \supset PU$); e para qualquer vizinhança V de zero em E existe $U \in \beta$ tal que $V \supset \bar{U} = D_{p_U}(0, 1)$.

Se S é um sistema de seminormas sobre um espaço local E , toda a seminorma $p \in S$ é contínua para a topologia definida por S ($\text{por as bolas } D_p(0, 1) \text{ ser vizinhanças de zero}$). Se T é outro sistema de seminormas sobre E , diz-se que T é equivalente a S se define a mesma topologia que S . Uma condição necessária e suficiente para que isto se verifique é que toda a seminorma de um qualquer dos sistemas S, T seja contínua para a topologia definida pelo outro. Daqui resulta imediatamente que em qualquer espaço localmente convexo E existe um sistema de seminormas máximo que define a sua topologia: o sistema de bolas as seminormas

Continuidade sobre E.

Um sistema S de seminormas sobre um espaço vetorial E diz-se filtrante se para quaisquer $p, q \in S$, existe $r \in S$ tal que $p(x) \leq r(x)$ e $q(x) \leq r(x)$, $\forall x \in E$ (isto implica que toda a família finita de seminormas de S é majorada por uma seminorma de S). Se S é filtrante as bolas $D_p(0, p)$ em que $p \in S$ e $p > 0$, constituem um sistema fundamental de vizinhanças de zero, por toda a interseção finita $D_{p_1}(0, p_1) \cap \dots \cap D_{p_m}(0, p_m)$, ^{$p_1, \dots, p_m \in S$ e $p_1, \dots, p_m > 0$} contém sempre toda $D_p(0, p)$ tal que ~~existe~~ p é uma seminorma de S que majora $p_1, \dots, p_m$ e $p = \inf\{p_1, \dots, p_m\}$.

Para qualquer sistema de seminormas S sobre E , existe sempre um sistema de seminormas filtrante S' sobre E equivalente a S . Por exemplo, $S' = \{ \sup\{p_1, \dots, p_m\}; p_1, \dots, p_m \in S \}$ ou $S' = \{ p_1 + \dots + p_m; p_1, \dots, p_m \in S \}$ etc.

1.4.2. TEOR. Seja E um e.v.e. e S um sistema de seminormas que gere a topologia de E . Então:

(a) Uma rede $x_j \rightarrow 0$ em E sse $\|x_j\| \rightarrow 0$, $\forall p \in S$;

(b) E é separável sse para cada $x \neq 0$ em E , existe $p \in S$ tal que $p(x) \neq 0$.

(c) Se H é subespaço de E , as restrições $p|_H$ das seminormas $p \in S$ a H geram a topologia induzida por E em H .

(d) Se F é outro espaço localmente convexo e $\mathcal{T}$ é um sistema de seminormas que define a topologia de F , uma aplicação

linear $f: E \rightarrow F$ é contínua sse para qualquer $q \in \mathcal{T}$ existe a
família finita $p_1, \dots, p_m \in S$ e um número $M > 0$ tal que

$$(1) \quad q[f(x)] \leq M \sup\{p_1(x), \dots, p_m(x)\}, \quad \forall x \in E.$$

Se S é filtrante, este condição expressa-se de seguinte modo mais simples:

(2). $\forall q \in \mathcal{P} \exists p \in S$ e $M > 0$ tal que $q[f(x)] \leq M p(x), \forall x \in E$

DEM. (a). Como cada $p \in S$ é contínua, $x_j \rightarrow 0 \Rightarrow p(x_j) \rightarrow 0$; logo, mente, se $p(x_j) \rightarrow 0, \forall p \in S$, de uma família finita $p_1, \dots, p_n$ e $p_1, \dots, p_n > 0$, existe um índice j_0 tal que $j \geq j_0 \Rightarrow p_k(x_j) \leq p_k$, $\forall k=1, \dots, n \Rightarrow x_j \in \bigcap_{1 \leq k \leq n} D_{p_k}(0, p_k)$, e portanto $x_j \rightarrow 0$.

(b): Basta ter em conta que E é separado se a interseção de bol as bol $D_p(0, p), p \in S$ e $p > 0$ que é idêntica à interseção de bol as razões de zero se reduz a $\{0\}$.

(c): Como as seminormas $p|_H$ são contínuas para a topologia induzida, basta ver que se uma rede x_j em H é tal que $\forall p$ $p|_H(x_j) = p(x_j) \rightarrow 0, x_j \rightarrow 0$ para esta topologia, o que é exatamente o que S é filtrante. Ora se (2) é

(d): Basta considerar o caso em que S é filtrante. Ora se (2) é verdadeira, para cada rede $x_j \rightarrow 0$ em E , $f(x_j) \rightarrow 0$ em F . Inversamente, se f é contínua, para cada $q \in \mathcal{P}$ existe $p \in S$ e $M > 0$ tal que $q[f(u)] \leq M p(u)$, para $u \in D_p(0, p)$. Então, se $x \in E$, existe $p > 0$ tal que $x \in D_p(0, p)$ e, portanto, $q[f(x)] = \frac{p}{n} q[f(u)] \leq \frac{p}{n} M$ para alguma implicação (de a arbitrariedade de p) $q[f(x)] \leq \frac{1}{n} p(x)$. e. q. d.

Tem-se uma consequência de 1.4.3 (c):

COROL. 1.: Se E é um e.d.e. e S é um sistema filtrante de seminormas em E que gera a topologia de E , uma forma linear em E é contínua se e somente se existe uma seminorma $p \in S$ e um índice n tal que $q[f(x)] \leq \frac{1}{n} p(x)$. e. q. d.

22

$\forall x \in E$

seja $M > 0$ tal que $|\varphi(x)| \leq M \forall x \in E$. Isto significa que uma forma linear φ sobre E é contínua se e só se for uma das seminormas do sistema S .

De 1.4.1(c) deduz-se também uma condição para que dois sistemas S e T de seminormas sobre um espaço vetorial E sejam equivalentes. Para o que em que S e T são filtrantes tem-se: $S \leq T$ se e só se houver uma seminorma φ de um dos sistemas tal que $\varphi(x) \leq M \psi(x), \forall x \in E$.

[Em particular duas seminormas φ e ψ sobre E são equivalentes se existe $M > 0$ e $N > 0$ tal que $N\varphi(x) \leq \psi(x) \leq M\varphi(x), \forall x \in E$.

Se E é um espaço vetorial e H é um subespaço de E , para qualquer seminorma φ sobre E , a função $\varphi|_H: H \rightarrow \mathbb{R}$ assim definida:

$$\varphi|_H(x) = \inf \{ \varphi(y) : y \in E, y|_H = x \}, \quad x \in H$$

é uma seminorma sobre H que se diz obtida de φ por restrição ao quociente. Verifica-se facilmente que:

1.4.3. TEOR. Se E é um e.l.c. e H é um subespaço vetorial de E , para qualquer sistema S de seminormas que gera a topologia de E , $S|_H = \{ \varphi|_H : \varphi \in S \}$ gera a topologia de H .

Prova-se, ainda, sem dificuldade, que se $(E_i)_{i \in I}$ é uma família de espaços localmente convexos e para cada $i \in I$ $\mathcal{S}_i$ é um sistema de seminormas que define a topologia de E_i , o sistema formado pelas seminormas $\varphi|_{E_i}$ define a topologia de $\prod_{i \in I} E_i$.

a topologia do espaço produto $E = \prod_i E_i$ é dada pelo conjunto de seminormas $\{q_0, p_i: x \in E \text{ e } q \in S_i\}$, em que p_i é a norma em E_i . Em particular:

1.4.4. TEOR. Se E é um espaço normado e X é um conjunto qualquer a topologia de convergência simples (ou pontual) no espaço E^X de funções $f: X \rightarrow E$ é definida pelas seminormas $p_x(f) = \|f(x)\|$.

1.5. TEOREMA DE HAHN-BANACH.

A. Alguns resultados que seguem referem-se a espaços vectoriais reais. Uma aplicação de E para $\mathbb{R}$ é também a ^{qualquer} restrição de uma aplicação linear complexa $E \rightarrow \mathbb{C}$ considerada a estrutura de espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ que resulta de restringir a multiplicação $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ a $\mathbb{R} \times E$. Para dar duplicar os exemplos continuamos com até agora a considerar espaços vectoriais indefinidamente reais ou complexos indicando os outros relativos a estrutura sobre $\mathbb{R}$ com o adjectivo "real"; assim, uma forma linear real sobre E é uma aplicação $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$; um subespaço real H de E é uma parte não vazia tal que $\alpha H + \beta H \subset H$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, etc.

Se E é um espaço complexo. Se g é uma forma linear sobre E $\text{Re } g$ é uma forma linear real sobre E , como se vê facilmente. Inversamente, dada uma forma linear real φ sobre E , existe uma única forma linear g sobre E tal que $\varphi = \text{Re } g$; a forma g é dada por

$$(3) \quad g(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix), \quad \forall x \in E.$$

A demonstração é um exercício simples que deixamos ao leitor. Vê-se assim que a relação $\varphi = \text{Re } g$ ou a equivalente $g = \varphi - i\varphi \circ i$ estabelece uma correspondência biunívoca entre as formas lineares φ sobre E e as formas lineares complexas g sobre E e é óbvio que g é contínuo se e só se φ é contínuo.

1.5.1. TEOR. DE HAHN-BANACH. (Forma analítica). Seja E um espaço
metrível, p uma subnorma sobre E e H um subespaço real de E.
Então, para qualquer forma linear φ sobre H que é limitada por
p em H, ou h_p , tal que $\varphi(x) \leq p(x), \forall x \in H$, existe uma forma linear
real $\tilde{\varphi}$ sobre E, que prolonga φ e é limitada por p em E, isto é,

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x), \forall x \in H, \text{ e } \tilde{\varphi}(x) \leq p(x), \forall x \in E.$$

DEM. (a). Considere-se primeiro o caso em que H é um hiperplano
 real de E. Tomando em E um elemento $a \notin H$, toda a forma linear
 real $\tilde{\varphi}$ sobre E que prolonga φ fica determinada pelo seu valor em a,
 $\alpha = \tilde{\varphi}(a)$; pois que, todo $x \in E$ representa-se (de um único modo) por
 expressão $x = \xi a + h$, em que $\xi \in \mathbb{R}$ e $h \in H$, e $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(h) + \xi \alpha$. Para
 a forma $\tilde{\varphi}$ que se procura tem-se, ainda, $\tilde{\varphi}(x) \leq p(x)$ ou, portanto,

$$(i) \quad \varphi(h) + \xi \alpha \leq p(\xi a + h), \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \text{ e } \forall h \in H.$$

Assim, para mostrar que existe uma forma $\tilde{\varphi}$ nas condições de enunciado
 basta mostrar que existe um número real α que verifique. Com
 este número, tem-se $\xi > 0$, e é equivalente a

$$(ii) \quad \alpha \leq p(a + h') - \varphi(h'), \quad \forall h' \in H$$

e tem-se $\xi < 0$ e é equivalente a

$$(iii) \quad \alpha \geq -p(-a + h'') + \varphi(h''), \quad \forall h'' \in H.$$

Basta então mostrar que $-p(-a + h'') + \varphi(h'') \leq p(a + h') - \varphi(h')$, $\forall h', h'' \in H$.
 Como tem-se $\varphi(h'' + h') \leq p(h'' + h') = p(-a + h'' + a + h') \leq p(-a + h'') + p(a + h')$
 dá-se o resultado.

(b) Para o caso geral teremos de usar o Lema de Zorn: Seja o
conjunto ordenado X tal que toda a cadeia totalmente ordenada
é majorada em X tem um elemento máximo.

Considere-se então o conjunto Δ constituído pelos pares (M, φ) em que M é subespaço real de E que contém H e φ é uma forma linear real sobre M que prolonga φ e é majorada por p em M , e ordenemos Δ de seguinte modo $(M, \varphi) \leq (M', \varphi')$ sse $M \subset M'$ e φ' prolonga φ . Verifica-se facilmente que todo o subconjunto totalmente ordenado de Δ tem um supremo em Δ e, portanto em virtude do lema de Zorn, Δ tem um elemento maximal (N, θ) . Vamos ver que $N = E$, o que demonstrará o teorema. Com efeito se fosse $N \neq E$, tomando em E um elemento $a \notin N$, N seria hiperplano de $N' = N + \mathbb{R}a$, mas em virtude de (a), θ prolonga-se numa forma linear real θ' sobre N' tal que $\theta'(x) \leq p(x)$ em N' . Assim, $(N', \theta') \in \Delta$ e $(N, \theta) < (N', \theta')$ mas seria maximal em Δ . c.q.d.

Do teorema anterior deduz-se o seguinte teorema de extensão para formas lineares reais ou complexas que muitos autores chamam também teorema de Hahn-Banach:

1.5.2. TEOR. Seja E um espaço vectorial e p uma seminorma sobre E . Então, qualquer forma linear φ sobre um subespaço H de E tal que $|\varphi(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in H$, prolonga-se numa forma linear ψ sobre E tal que se tem também $|\psi(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in E$.

DEM. (a). No caso em que E é real, a consequência imediata de 1.5.1, tendo em conta que, sendo p uma seminorma, para qualquer forma linear g sobre um subespaço M de E , a relação $|g(x)| \leq p(x)$ é equivalente a $g(x) \leq p(x)$.

(b). Suponhamos que E é complexo e seja $h = \operatorname{Re} \varphi$; h é uma forma linear real sobre H e sempre $h(x) \leq p(x)$, $\forall x \in E$. Em virtude de 1.5.1, h estende-se mesmo forma linear real g sobre E tal que $g(x) \leq p(x)$, $\forall x \in E$. Considere-se a forma linear complexa φ sobre E tal que $g = \operatorname{Re} \varphi$ ou seja $\varphi(x) = g(x) - i g(ix)$. $\forall x \in E$ imediatamente que φ herda φ ; assim $\varphi(x) = g(x) - i g(ix)$. $\forall x \in E$ temos cada $x \in E$ existe um número complexo ω tal que $|\omega| = 1$ e $|\varphi(x)| = \varphi(\omega x) = g(\omega x)$. Assim (note que $|\varphi(x)|$ é real), $|\varphi(x)| = \varphi(\omega x) = g(\omega x) \leq p(\omega x) = p(x)$. e.g.d.

Deste teorema resultam as seguintes proposições bastante importantes nas aplicações:

COROL. 1. Se E é um espaço normado e p uma seminorma sobre E , para cada $x_0 \in E$ existe uma forma linear φ sobre E tal que $\varphi(x_0) = p(x_0)$ e $|\varphi(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in E$.

No entanto, $H = K x_0$ define-se uma forma linear θ sobre $\theta(\lambda x_0) = \lambda \theta(x_0)$, $\forall \lambda \in K$. $\theta(\lambda x_0) = \lambda \theta(x_0)$. Assim, $\forall \lambda \in K$ e tem-se $|\theta(\lambda x_0)| = |\lambda| p(x_0) = p(\lambda x_0)$. Assim, por 1.5.2, θ estende-se mesmo forma linear φ sobre E que sempre as condições do enunciado.

COROL. 2. Se E é um espaço localmente convexo separado e nas suas normas, existe pelo menos uma forma linear contínua sobre E nas suas normas (há muitas palavras o dual topológico E' de E nas suas).

DEM. Escolher $x_0 \in E$ um ponto $x_0 \neq 0$. Como $E \neq \{0\}$,
 existe uma seminorma contínua p sobre E tal que $p(x_0) \neq 0$.
 Pela conclusão anterior existe uma forma linear φ sobre E
 tal que $\varphi(x_0) = p(x_0) \neq 0$ e $|\varphi(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in E$, e que
 portanto, é contínua.

COROL. 3. Se E é um espaço localmente convexo, toda a forma
 linear contínua φ sobre um subespaço H de E estende-se a
 uma forma linear contínua sobre E .

DEM. ^{Como} as restrições a H das seminormas contínuas sobre
 E geram a topologia de H (1.4.2.(e)), existe uma semi-
 norma p contínua sobre E tal que $|\varphi(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in H$,
 portanto, em virtude de 1.5.2, φ estende-se a todo o espaço
 E como forma linear contínua.

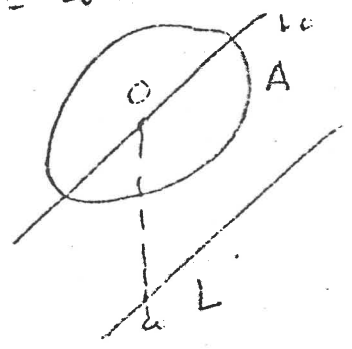
B. TEOREMA DE HAHN-BANACH NA FORMA GEOMÉTRICA. SE
PARA O DE CONJUNTOS CONVEXOS Para o que segue chamaremos
 atenção a certos conceitos lineares. Seja E um espaço
 vetorial. Chama-se variedade linear ou afim de E a um
 subconjunto $M = a + H$, que é imagem por translação de uma tra-
 zação $x \rightarrow a + x$, $a \in E$, de um subespaço vetorial H de E .
 O subespaço H é univocamente determinado por M , enquanto
 que o ponto a pode ser escolhido arbitrariamente em M . O
 - se denominar (resp. codimensionar) de M a dimensão (resp. co-
 dimensionar) de H . Se $\text{Cod}(M) = 1$, diz-se um hiperplano
 afim ou simplesmente hiperplano se não há risco de confusão.
 Neste caso, existe uma forma linear φ sobre E , não nula, e
 que $M = a + \text{Ker } \varphi$ de modo que M é definida pela

Seja $\varphi(x) = \alpha$ em que $\alpha = \varphi(a)$, isto é, $M = \{x \in E : \varphi(x) = \alpha\}$. De acordo com as convenções feitas, uma variedade linear real de E é um subespaço de E para a estrutura de espaço vetorial real de E ; e, portanto, é um subconjunto $M = a + H$ em que H é subespaço real de E e $a \in E$.

1.5.3. TEOREMA DE HAHN-BANACH (forma geométrica). Seja E e. v. r. l. Se A é um conjunto convexo aberto não vazio de E e L é uma variedade linear real de E tal que $L \cap A = \emptyset$, existe em E uma hiperplano real afim M , fechado, tal que $L \subset M$ e $A \cap M = \emptyset$.

DEM. Usando uma translação se pode supor que $0 \in A$. Assim, A é vizinhança convexa aberta de zero e, portanto, a norma de Minkowski p_A em A é uma subnorma contínua sobre E . Note-se ainda que, como A é aberto, $A = B_{p_A}(0,1) = \{x \in E : p_A(x) < 1\}$.

Posto isto, tome-se um ponto $a \in L$ e seja L_0 o subespaço (real) de E tal que $L = a + L_0$; L_0 é um subespaço em $N = L_0 + \mathbb{R}a$ e existe portanto, uma forma linear real φ sobre N tal que $L_0 = \text{Ker } \varphi$; como $\varphi(a) \neq 0$ (pois $a \notin L_0$).



tomase supor φ estendida de modo que $\varphi(a) = 1$. Assim, L é de pontos tais que $\varphi(x) = 0$.

Vamos ver que, para cada $x \in N$, $\varphi(x) \leq p_A(x)$. Que se $x \in N$, tem-se $x = t_0 + \xi a$ com $t_0 \in L_0$ e $\xi \in \mathbb{R}$, de modo que $\varphi(x) = \xi$. Se $\xi \leq 0$ é óbvio que $\varphi(x) \leq p_A(x)$; se $\xi > 0$, pode-se escrever $p_A(x) = \xi p_A(\frac{1}{\xi} t_0 + a)$ e como $\frac{1}{\xi} t_0 + a \in A$ e $p_A \geq 1$ em A segue-se que $p_A(x) \geq \xi$. Nas condições, pela extensão de Hahn-Banach na forma usual, 1.5.1, pode-se estender φ a uma forma linear ψ sobre E tal que $\psi(x) \leq p_A(x)$, $\forall x$. O hiperplano M definido por $\psi(a) = 1$ contém os pontos do fecho de A . Com efeito, para cada $x \in M$, $p_A(x) \geq \psi(x) = 1$ é óbvio, M não encontra A pois para cada $x \in A$, $p_A(x) < 1$ e é fechado visto que ψ é contínua (pois as normas p_A e p são

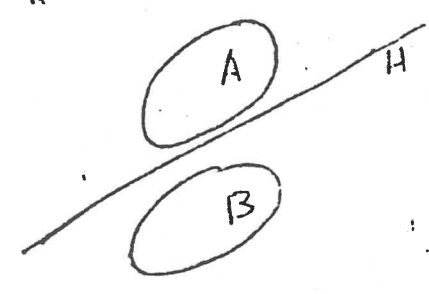
COROL. Se um conjunto convexo aberto A não e.v.t. E mas contém a origem, existe uma função linear $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$, contínua, tal que $\varphi(x) > 0, \forall x \in A$.

DEM. Pelo teorema anterior, existe em E um hiperplano real fechado H tal que $0 \in H$ e $A \cap H = \emptyset$. Se φ é uma função linear real tal que $H = \text{Ker } \varphi$ (portanto, contínua), como $\varphi(A)$ é um intervalo de $\mathbb{R}$ e $0 \notin \varphi(A)$, tem-se $\varphi(x) > 0, \forall x \in A$, ou $\varphi(x) < 0, \forall x \in A$, e, portanto, a conclusão segue-se com $\varphi = \varphi$ ou $\varphi = -\varphi$. C.Q.D.

Considere-se num e.v.t. E um hiperplano (afim) real e fechado H de equação $\varphi(x) = \alpha$ (φ é portanto uma função linear real contínua mas não $\alpha \in \mathbb{R}$). Os conjuntos convexos $F^\alpha = \{x \in E: \varphi(x) \geq \alpha\}$,

$F_\alpha = \{x \in E: \varphi(x) \leq \alpha\}$; $G^\alpha = \{x \in E: \varphi(x) > \alpha\}$ e $G_\alpha = \{x \in E: \varphi(x) < \alpha\}$ chamam-se semiespaços de E determinados por H . Os semiespaços F^α e F_α são fechados enquanto que G^α e G_α são abertos; e portanto portanto todos eles têm por fronteira o hiperplano H e que, portanto, G^α e G_α contêm em seu interior de F^α e G_α o interior de F_α . Dado dois conjuntos meios $A, B \subseteq E$, diz-se que A e B são separados por H se " $\varphi(x) \leq \alpha \leq \varphi(y), \forall x \in A, \forall y \in B$ " ou " $\varphi(y) \leq \alpha \leq \varphi(x), \forall x \in A, \forall y \in B$ ", equivalente a dizer que A está em um dos semiespaços fechados F^α, F_α e B está em outro.

Se " $\varphi(x) < \alpha < \varphi(y), \forall x \in A, \forall y \in B$ " ou " $\varphi(y) < \alpha < \varphi(x), \forall x \in A, \forall y \in B$ " diz-se que A e B são estritamente separados por H ; equivalente a dizer que A está em um dos semiespaços abertos G^α, G_α e B está em outro.



Não que sepa outros estudos alguns teoremas relativos à separação de conjuntos convexos.

1.5.4. TEOR. (1^o Ten. de Separar). Se $A \subseteq B$ são conjuntos convexos, A não vazio e descompacto nem $\emptyset \neq E \subseteq A$ e A é aberto, existe em E um hiperplano real fechado H que separa $A \subseteq B$. Se $A \subseteq B$ são ambos abertos, a separação é estrita.

DEM. $A - B$ é convexo e aberto e como $0 \notin A - B$, pela Corolário de 1.5.3, existe uma função linear contínua $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ que é φ -positiva em $A - B$ de modo que se tem $\varphi(x) < \varphi(y)$, $\forall x \in B, \forall y \in A$. Assim $\alpha = \inf_{x \in B} \varphi(x)$ é finito e o hiperplano $H = \{x: \varphi(x) = \alpha\}$ separa A de B .

B . Note-se que B possui semiclosed F_α e A em F_α ; mas, como A é aberto e o semiclosed aberto $G^\alpha = \text{int}(F_\alpha)$, $A \subset G^\alpha$. Se B é também aberto, pela mesma razão, $B \subset G^\alpha$ e a separação é estrita.

1.5.5 TEOR. (2^o Ten. de Separar). Se $A \subseteq B$ são conjuntos convexos, A não vazio e descompacto nem $\emptyset \neq E$ absolutamente convexo em E , e A é fechado e B é compacto, existe em E um hiperplano real fechado H que separa estritamente A e B .

DEM. Facilmente se verifica que $A - B$ é fechado; como $0 \notin A - B$ existe uma vizinhança U absolutamente convexa de zero em E tal que $(A - B) \cap (U + U) = \emptyset$. Deste facto deduz-se facilmente que $(A + U) \cap (B + U) = \emptyset$. Então como $A + U$ e $B + U$ são convexos e abertos do mesmo anterior resulta que existe um hiperplano real fechado H que separa estritamente $A + U$ e $B + U$ e, portanto, $A \subset B$. c.q.d.

Em particular, num espaço localmente convexo E quaisquer conjuntos convexos fechados $A \neq \emptyset$ podem ser estritamente separados de quaisquer pontos $a \notin A$ por um hiperplano real fechado.

Corol. Num espaço localmente convexo E todo o conjunto convexo fechado A é a interseção dos subespaços fechados de E que contém A .

Defin. xpm $A' = \bigcap \{ S : S \text{ é subespaço fechado de } E \text{ que contém } A \}$. E' é o bar. que $A'CA'$. Tendo em vista o x/y A , como x é deriv. de A tem um hiperplano real fechado H , num dos subespaços fechados determinados por H contém A e não contém x , de modo que $x \notin A'$.

OBSERVAÇÃO

Após esta observação resulta que os pontos fechados de num x, y e z dependem somente dos pontos locais. Conhecendo, sobre o top de dual topologia E' . Assim se E é um espaço vetorial x, y, z topologias localmente convexas sobre E tais que $E(\tau_1)$ e $E(\tau_2)$ têm o mesmo dual topologia, os conjuntos formados por τ_1 por os mesmos que τ_2 .

~~6. Dado E e F ...~~

1.6. CONJUNTOS LIMITADOS. Se E é um espaço métrico e A, B são subconjuntos de E , diz-se que B absorve A se existe $P > 0$ tal que $A \subset \cap B, \forall n \geq P$.

Se B é equilibrado, háve que B absorva A basta que exista $P > 0$ tal que $A \subset P B$, pois tudo assim, tem-se para $n \geq P$, $A \subset P B \subseteq n \frac{P}{n} B \subset \cap B$.
Um conjunto $B \subset E$ absorvente, no sentido que tem sentido é um conjunto que absorve qualquer ponto de E .

1.6.1. TEOR. Se E é um espaço localmente convexo e S um sistema de seminormas que define a topologia de E . Então, háve qualquer $A \subset E$ são equivalentes:

- (1) Toda a vizinhança de zero absorve A .
- (2) Toda a seminorma $p \in S$ é limitada em A , isto é, háve
cade $p \in S$ existe um número $P > 0$ tal que $p(x) \leq P, \forall x \in A$.
- (3) Para qualquer sucessor x_m de pontos de A , $\frac{1}{m} x_m \rightarrow 0$.

DEM: (1) $\Rightarrow$ (2). Se (1) se verifica, tomando $p \in S$, a bola $D_p(0,1)$ absorve A , $\exists x_m$, portanto, $P > 0$ tal que $A \subset P D_p(0,1) = P_p(0,P)$ o que mostra que $p(x) \leq P, \forall x \in A$. (2) $\Rightarrow$ (3) é imediato, pois háve cade $p \in S$, $p(\frac{1}{m} x_m) = \frac{1}{m} p(x_m) \leq P/m \rightarrow 0$. (3) $\Rightarrow$ (1). Vamos fazer a contradição. Ora se (1) não se verifica, existe uma vizinhança V de zero equilibrada que não absorve A e portanto A não está contida em nenhum dos conjuntos $V, 2V, \dots, nV, \dots$. Assim, existe uma sucessor x_m de pontos de A tal que $x_m \notin nV$ ou seja $\frac{1}{n} x_m \notin V$; portanto, $\frac{1}{m} x_m$ não tende zero e (3) não se verifica. c. q. d.

Nem todo espaço localmente convexo E , um conjunto A diz-se limitado se satisfizer uma qualquer das condições (equivalentes) de terem s.c.

ps { Convém notar que esta noção de conjunto limitado depende sómente da topologia de E .
Se a topologia de E é definida por uma norma $\|\cdot\|$, $A \subseteq E$ é limitado sse existe $P > 0$ tal que $\|x\| \leq P, \forall x \in A$, ou seja A está contida numa bola. A noção coincide portanto com a que conhecíamos da teoria dos espaços normados.

- 1.6.2. TEOR. Se E é um espaço localmente convexo, então:
- (a) se $A \subseteq E$ é limitado, todo o conjunto $B \subseteq A$ é limitado.
 - (b) Toda a reunião finita $A_1 \cup \dots \cup A_n$ de conjuntos limitados em E é um conjunto limitado em E ;
 - (c) Toda a parte finita de E é limitada.
 - (d) Se A é limitado em E , o mesmo acontece com $\overline{A}$, $ac(A)$ e $ac(\overline{A})$.
 - (e) Todo o conjunto compacto de E é limitado.
 - (f) Se E é o produto $\prod_i E_i$ de uma família de espaços localmente convexos e para cada i , A_i é parte limitada de E_i , $A = \prod_i A_i$ é limitado em E .
 - (g) Toda a sucessão x_n convergente em E é limitada. (é falso para as redes em geral).
 - (h) Toda a aplicação linear contínua de E noutro espaço localmente convexo F transforma limitados em limitados.

Q.E.M. (a) é imediato. (b) resulta de que se x é uma família finita de n elementos de E em cada um dos conjuntos $A_1, \dots, A_n$ é maiorado na sua

Um espaço localmente convexo E diz-se normável se existe uma norma sobre E que define a sua topologia. Do que precede vem
COROL. Um espaço localmente convexo E é normável sse é plano e tem uma vizinhança de zero limitada.

EXERCÍCIOS 1. Num e.v.t. E um conjunto A diz-se limitado se é absorvido por quaisquer vizinhanças de zero. Mostre que isto equivale a admitir que $\frac{1}{m} x_m \rightarrow 0$, para quaisquer seqs x_m de pontos de A . Verifique que todas as propriedades de 1. em excepção de ... são válidas num e.v.t.
2. Mostre que 1.6.3 é o contrário das válidas sob a hipótese mais geral de E ser um e.v.t., supondo a vizinhança de zero.
3. Mostre que um e.v.t. é separado sse o único subespaço vectorial de E limitado é o subespaço nulo.

1.7. ESPAÇOS LOCALMENTE CONVEXOS METRIZÁVEIS. Um espaço topológico E diz-se metrizável se existe uma distância d sobre E que define a sua topologia. Se E é metrizável E é separado e todo o ponto $a \in E$ possui um sistema fundamental de vizinhanças de zero numerável (por exemplo, as bolas de centro a e raio $1/m$, $m \in \mathbb{N}$, relativas a d $\{x \in E \mid d(x, a) \leq \frac{1}{m}\}$). A recíproca não é em geral verdadeira; ela ocupa-se porém na categoria dos espaços localmente convexos. Para isso vem em seguida. Antes disso, porém, convém introduzir a seguinte definição:

Seja E um espaço vectorial; uma distância d sobre E diz-se

Nota (1): É também válida na categoria dos e.v.t. e mais geralmente na categoria dos grupos topológicos.

36

Invariante com as translações se $d(x, y) = d(x+a, y+a)$, $\forall x, y, a$.

Isso equivale a dizer que as translações $x \rightarrow a+x$ são isometrias do espaço $E(d)$ sobre si próprias e, portanto, homeomorfismos. Nestas condições uma rede $x_j \rightarrow a$ em $E(d)$ se $x_j \rightarrow a$ co se para zero.

[A distância definida por uma norma sobre E , $d(x, y) = \|x - y\|$ é invariante com as translações, como é óbvio.

1.7.1. TEOR. Se E é um espaço localmente convexo separado, as condições seguintes são equivalentes:

- (a) E tem um sistema fundamental de vizinhanças de zero enumerável.
- (b) Existe uma sucessão crescente de seminormas sobre E , $p_1 \leq \dots \leq p_m \leq \dots$ que define a topologia de E .
- (c) Existe uma distância d sobre E invariante com as translações, que define a topologia de E .

[Assim, um espaço localmente convexo E é metrizable se e só se tem um sistema fundamental de vizinhanças de zero enumerável. Além disso, a topologia de um e. l. c. metrizable pode ser definida sempre por uma distância invariante com as translações.

DEM. É óbvio que (b) $\Rightarrow$ (a), basta escolher p_n que (a) $\Rightarrow$ (c) e (b) $\Rightarrow$ (c).

(a) $\Rightarrow$ (b). Por hipótese, existe em E um sistema fundamental de vizinhanças de zero $W_1, \dots, W_m, \dots$ que podemos supor absolutamente convexas e fechadas. A partir deste sistema pode-

formar outra decrescente $V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$ onde $V_1 = W_1$,
 $V_2 = W_1 \cap W_2, \dots, V_m = W_1 \cap \dots \cap W_m, \dots$. Os pontos de Minkowski
 $p_1 = \bigcap V_1, \dots, p_m = \bigcap V_m, \dots$ formam uma sucessão crescente de seminormas
 que define a topologia de E .

(b) $\Rightarrow$ (c). Suponhamos que a topologia de E é definida por uma família crescente de seminormas $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_m \leq \dots$. Para cada $x \in E$
 a série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{p_m(x)}{1+p_m(x)}$ é convergente, pois é majorada por $\sum \frac{1}{2^n}$.
 designamos por $|x|$ a sua soma

$$(1) \quad |x| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{p_m(x)}{1+p_m(x)}$$

A função $|x|$ assim definida em E é não negativa e tem as
 propriedades:

$$(2) \quad |x| = 0 \text{ se } x = 0; \quad (3) \quad |x| = |-x|, \quad \forall x \in E;$$

$$(4) \quad |x+y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in E.$$

As propriedades (2) e (3) são imediatas. Para estabelecer (3), vejamos em
 primeiro lugar que se tem para quaisquer $a, b, c \geq 0$ tais que

$$c \leq a+b \quad (5) \quad \frac{c}{1+c} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

Se $c = 0$ é imediato; por outro lado se $c > 0$ e também, é claro,
 $a+b > 0$. Assim,

$$\frac{c}{1+c} = \left(1 + \frac{1}{c}\right)^{-1} \leq \left(1 + \frac{1}{a+b}\right)^{-1} = \frac{a+b}{a+b+1} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

Agora, usando a relação que acabamos de estabelecer e tendo em
 conta que $p_m(x+y) \leq p_m(x) + p_m(y)$, obtemos imediatamente (4).

Posto isto, definamos para cada par $x, y \in E$

$$d(x, y) = |x - y|$$

De (2) (3) e (4) resulta imediatamente que d é uma distância sobre E e é óbvio que é naturalmente para as translações. Resta estabelecer que a topologia definida por d é idêntica à topologia de E . Para isto basta provar que uma rede $x_j \rightarrow a$ em $E(d)$ se $x_j \rightarrow a$ em E ou seja:

$d(x_j, a) \rightarrow 0$ é equivalente a $\forall n \geq 1, h_n(x_j - a) \rightarrow 0$.

Como

$$(6) \quad d(x_j, a) = \sum \frac{1}{2^n} \frac{h_n(x_j - a)}{1 + h_n(x_j - a)},$$

se $d(x_j, a) \rightarrow 0$, cada um dos termos da série (sendo $\leq d(x_j, a)$) tende para zero e isto implica $h_n(x_j - a) \rightarrow 0, \forall n \geq 1$. Inversamente, ^{suficiente para} esta relação se verifica. Dado $\delta > 0$, como a série de segundo membro de (6) é majorada por $\sum \frac{1}{2^n}$ pode-se fixar um inteiro m de modo que a soma dos termos de índice $> m$ seja majorada por $\delta/2$; assim

$$d(x_j, a) \leq \sum_{1 \leq n \leq m} \frac{1}{2^n} \frac{h_n(x_j - a)}{1 + h_n(x_j - a)} + \delta/2$$

e como a soma do segundo membro tem um número finito de parcelas $\rightarrow 0$ ela fica $\leq \delta/2$ a partir de certo índice j.o. e.q.d.

1.8. ESPAÇOS COMPLETOS.

A. RÊDES DE CAUCHY. Recordemos que num espaço normado E (II.11) uma sucessão x_m diz-se uma sucessão de Cauchy se $\forall \delta > 0$ existe um inteiro m_0 tal que $m, n \geq m_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| \leq \delta$.
 Este conceito pode ser também definido da seguinte maneira: para cada
bole $D(0, \delta)$ existe um inteiro m_0 tal que $m, n \geq m_0 \Rightarrow$
 $x_m - x_n \in D(0, \delta)$; e é claro, em vez de boles podemos usar vizinhanças ~~qualquer~~ ^{qualquer} $\emptyset$ de zero. É sob esta forma que vamos generalizar esta noção de sucessões de Cauchy para os espaços localmente convexos.
 Porém, em vez de sucessões também consideramos mais geralmente rêdes; o formalismo é análogo.

Seja E um ^{s.v.t} espaço localmente convexo. Uma rêde $(x_j)_{j \in J}$ em E diz-se uma rêde de Cauchy se para cada vizinhança U de zero, existe um índice $j_0 \in J$ tal que

$$i, j \geq j_0 \Rightarrow x_j - x_i \in U.$$

Se considerarmos a rêde dupla $(x_j - x_i)_{(j, i) \in J \times J}$ ^{indexada} em $J \times J$ (a ordem em $J \times J$ é a ordem habitual e em relação a ela $J \times J$ é filtrante à direita como é J). Então imediatamente que (x_j) é rêde de Cauchy em E se e só se $x_j - x_i \rightarrow 0$ em E .

Se p é uma seminorma sobre E , (x_j) diz-se, naturalmente, uma rêde de Cauchy em relação a p se $\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 \in J$ tal que $j, i \geq j_0 \Rightarrow p(x_j - x_i) \leq \varepsilon$. É fácil ver que:

1.8.1. TEOR. Se S é um sistema de seminormas que define a topologia de E , uma rêde (x_j) em E é de Cauchy se e só se é de Cauchy relativamente a qualquer $p \in S$.

1.8.2. TEOR. Se E é um e.l.e. então:

(a) Toda a rede convergente em E é de Cauchy (a recíproca pode ser falsa).

(b) Se x_j é rede de Cauchy em E e tem um limite aderente a ,
 $x_j \rightarrow a$.

(c) Se x_m é sucessor de Cauchy em E , x_m é limitada (é falsa para as redes em geral).

(d) Toda a aplicação linear ^{contínua} f de E num e.l.e. F transforma qualquer rede x_j de Cauchy em E numa rede $f(x_j)$ de Cauchy em F .

DEM. (a). Se $x_j \rightarrow a$ em E , iniciando com vizinhanças U de a que são absolutamente convexas, existe $j_0 \in J$ tal que $x_j - a \in \frac{1}{2}U$, para $j \geq j_0$. Então se $j, l \geq j_0$, $x_j - x_l = (x_j - a) - (x_l - a) \in \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U = U$. (Pode-se também demonstrar de seguinte modo: se $x_j \rightarrow a$, $x_j - x_l \rightarrow a - a = 0$).

(b). Como x_j é de Cauchy, dada uma vizinhança U de a que é absolutamente convexa tem-se a partir de certo $j_0 \in J$, $x_j - x_l \in \frac{1}{2}U$ e como a aderente a (x_j) pode-se supor que $x_l - a \in \frac{1}{2}U$. Assim, $x_j - a = (x_j - x_l) + (x_l - a) \in \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U = U$.

(c) Basta provar que para qualquer seminorma p contínua em E , $p(x_m)$ é limitada. Ora iniciando com $\delta > 0$ existe m_0 tal que para $m \geq n_0$, $p(x_m - x_{m_0}) \leq \delta$ e, portanto, $p(x_m) \leq p(x_{m_0}) + \delta$. Assim, os termos $p(x_m)$ tais que $m \geq m_0$ formam um conjunto limitado e os restantes são em número finito.

(d) Basta ver que $f(x_j) - f(x_l) = f(x_j - x_l) \rightarrow 0$.

(EXERCÍCIO. Prove que se (x_j) e (y_j) são redes de Cauchy em E e (λ_j) é rede de Cauchy em K (tome como mltiplos componentes de índices), $(x_j + y_j)$ e $(\lambda_j x_j)$ são redes de Cauchy em E .

B. FILTROS DE CAUCHY. A cada rede ~~de Cauchy~~ (x_j) ^{em E} corresponde uma base de filtro que é formada pelos conjuntos $X_j = \{x_k : k \geq j\}$, $j \in J$ de acordo com a definição (x_j) é rede de Cauchy se e só se para cada vizinhança U de zero existe $j_0 \in J$ tal que

$$X_{j_0} - X_{j_0} \subset U,$$

(note que $X_{j_0} - X_{j_0} = \{x_k - x_j : k, j \geq j_0\}$).

A definição sob esta forma estende-se imediatamente aos filtros. Um filtro (ou base de filtro) β sobre E diz-se de Cauchy se e só se para cada vizinhança U de zero existe $M \in \beta$ tal que $M - M \subset U$.

A relação $M - M \subset U$ exprime-se dizendo que M é pequeno da ordem de U . Assim, β é filtro de Cauchy se contém conjuntos pequenos da ordem de qualquer vizinhança de zero.

OBS. 1. Do que precede resulta que (x_j) é rede de Cauchy se a base de filtro associada é de Cauchy.

2. Se β é uma base de filtro sobre E , Ordenando β pela relação $\supset$ (isto é, $A \in \beta$ significa $A \supset B$), β fica um conjunto filtrante a' direita. e associamos a cada $A \in \beta$ um ponto $x_A \in A$, forma-se uma rede $(x_A)_{A \in \beta}$ que se diz extraída de β . É fácil ver que se β é base de filtro de Cauchy, toda a rede extraída de β é rede de Cauchy.

As propriedades relativas a redes de Cauchy estendem-se aos filtros:

1.8.2. TEOR. Se E é um e.l.e, então: (a) Toda o filtro convergente em E é filtro de Cauchy; (b) Se F é filtro de Cauchy em E e tem um ponto aderente a $F \rightarrow a$. (c) Toda a aplicação linear contínua de E num e.l.e F transforma qualquer base de filtro de Cauchy em E num base de filtro de Cauchy em F .

DEM. EXERCÍCIO.

C. ESPAÇOS COMPLETOS. Um conjunto X num e.l.e E diz-se completo se toda a rede Cauchy (x_α) de pontos de X converge para um ponto de X . Em particular, E é completo se toda a rede de Cauchy em E converge em E . A noção de conjunto completo pode ser dada em termos de filtros:

1.8.3. TEOR. Se E é um e.l.e, para quaisquer $X \subseteq E$ as seguintes condições:

(a) X é completo;

(b) toda a base β de filtro de Cauchy sobre X converge para um ponto de X .

DEM. É imediato que (b) $\Rightarrow$ (a). Vejamos que (a) $\Rightarrow$ (b). Suponha que X é completo e seja β uma base de filtro de Cauchy sobre X . Considere-se uma rede $(x_\alpha)_{\alpha \in \beta}$ extraída de β (Obs 2 de B.), (x_α) é rede de Cauchy e converge portanto para um ponto $x_0 \in X$. Vamos ver que o ponto x_0 adere a β o que terminará a demonstração em virtude de 1.8.2.(b). Para isso basta observar que para qualquer $M \in \beta$ existe sempre um elemento $x_\alpha \in M$ tal que x_α adere a M . Como x_α adere a M e x_α converge para x_0 , então x_0 adere a M .

- 1.8.4. TEOR. (a) Toda o subconjunto fechado X de um e.l.e E é completo e' completo;
(b) Num e.l.e separado E todo o subconjunto completo X de E é fechado;
(c) Toda o produto $E = \prod_{\alpha} E_{\alpha}$ de espaços localmente convexos é completo e' completo.
(d) Toda o espaço F isomorfo a um espaço localmente convexo E é completo e' completo.

DEM. (a). Se (x_j) é uma rede de Cauchy de pontos de X , x_j converge para um ponto $a \in E$, mas como X é fechado, $a \in X$.

(b). Se (x_j) uma rede de Cauchy de pontos de X convergente, para um ponto $a \in E$; x_j é rede de Cauchy e converge, portanto, para um ponto $b \in X$, tal que X é completo. Mas como E é separado $a = b$, o que prova que X é fechado.

(c) Se (x_i) é rede de Cauchy em E , para cada índice α , $p_{\alpha}(x_i)$ é rede de Cauchy em E_{α} e converge, portanto, para algum ponto $y_{\alpha} \in E_{\alpha}$. Assim $(x_i) \rightarrow y = (y_{\alpha})$

(d) Se φ um isomorfismo de E sobre F . Tomando uma rede de Cauchy (y_j) em F , $x_j = \varphi^{-1}(y_j)$ é rede de Cauchy em E . Então $x_j \rightarrow x$ em E e $y_j = \varphi(x_j) \rightarrow y = \varphi(x)$ em F . c.q.d.

Tem-se o seguinte resultado mais geral que (d) e que se prova de modo análogo: Se E e F são espaços localmente convexos e φ um isomorfismo de E sobre F , para qualquer $X \subset E$ completo, $\varphi(X)$ é completo em F . Isto, no entanto, é falso se φ é uma aplicação linear contínua $E \rightarrow F$ qualquer.

D. ESPAÇOS SEMICOMPLETOS.

Um conjunto X num espaço localmente convexo E (em particular $X = E$) diz-se semicompleto ou sequencialmente completo se toda a sucessão de Cauchy (x_n) de pontos de X converge para um ponto de X . Se X é completo é semicompleto, como é óbvio; a recíproca é em geral falsa, mas verifica-se no caso em que E tem um sistema fundamental de vizinhanças de zero numerável.

1.8.5. TEOR. Se E é um espaço localmente convexo com um sistema fundamental de vizinhanças de zero numerável, para quaisquer $X \subseteq E$ são equivalentes:

- (a) X é completo ;
- (b) X é semicompleto.

DEM. Basta provar que (b) $\Rightarrow$ (a). Em virtude da hipótese feita determinamos em E uma sucessão ^{decrescente} de vizinhanças de zero absolutamente convexas

$$V_1 \supset \dots \supset V_m \supset \dots$$

Construindo um sistema fundamental. Como X é semicompleto, toda a sucessão de Cauchy de pontos de X converge em X ; temos assim que este conjunto é todo o local de filtros $\mathcal{B}$ de Cauchy. Para X converge também para um ponto de X . A cada inteiro $n \in \mathbb{N}$ corresponde um elemento $B_n \in \mathcal{B}$ tal que $B_n - B_n \subset \frac{1}{2} V_n$ e existe, portanto, uma sucessão x_n de pontos de X tal que $x_n \in B_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Vamos ver que (x_n) é sucessão de Cauchy. Com efeito, dada uma vizinhança V_p , e $m, n \geq p$,

tomemos um ponto y na interseccao $B_m \cap B_n \cap B_p$ (que nao e' vazia pois B e' base de filtros). Tem-se entao

$$x_m - x_n = (x_m - y) + (y - x_n) \in (B_m - B_m) + (B_n - B_n) \subset \frac{1}{2}V_m + \frac{1}{2}V_n \subset V_p$$

O que prova que (x_m) e' de Cauchy. Assim $x_m \rightarrow a \in X$. Vamos ver que tambem $B \rightarrow a$, o que terminara a demonstracao. Dada V_p , existe $m \geq p$ tal que $x_m - a \in \frac{1}{2}V_p$; entao, se $y \in B_m$, $y - a = (y - x_m) + (x_m - a) \in (B_m - B_m) + \frac{1}{2}V_p \subset \frac{1}{2}V_m + \frac{1}{2}V_p \subset V_p$, o que mostra que $B_m \subset a + V_p$ e que, portanto, $B \rightarrow a$. c.q.d.

O teorema anterior generaliza-se do seguinte modo:

1.8.5'. TEOR. Se α J um conjunto ordenado filhante a' direita. Se um espaco localmente convexo E tem um sistema fundamental de vizinhancas de zero $(V_j)_{j \in J}$, indexado em J, e decrecente, isto e', $j \leq l \Rightarrow V_l \subset V_j$, entao para qualquer $X \subset E$ ser equivalentes:

- (a) X e' completo;
- (b) Toda a rede ^{de Cauchy} $(x_j)_{j \in J}$ de pontos de X converge em X.

A demonstracao e' a mesma que a de 1.8.5, basta substituir N_1 por J .

OBSERVAÇÕES 1. Pode-se expor a conclusao (b) dizendo que X e' J -completo; assim as sequencias completas s' o mesmo que ser N_1 -completo.
2. Para ter o espaco localmente convexo E pode-se fixar

Um conjunto J nas condições de 1.8.5: Se V é um sistema fundamental de vizinhanças de z_0 em E pode-se tomar $J = V$ ordenado pela relação $\supset$ e para aplicar $f \rightarrow V_j$ a identidade. Ve-se assim que para um espaço localmente convexo ser completo basta que sejam convergentes as redes de Cauchy indicadas. Quem sistema fundamental de vizinhanças de z_0 .

De 1.8.5 resulta:

COROL. Num e.l.e. metrizable um conjunto X é completo se e só se a sucessor de Cauchy (x_n) de pontos de X converge em X .

Em particular, um espaço normado é completo se e só se a sucessor de Cauchy é convergente.

O espaço K^n (n inteiro ≥ 0) é completo; K é completo como se sabe e K^n é o produto de n espaços idênticos a K . Daqui resulta também que todo e.l.e. E formado de dimensão finita é completo, pois é isomorfo a K^n .

Se E é um e.l.e. metrizable e d uma distância sobre E que define a sua topologia é fácil ver que as sucessões de Cauchy em E são as mesmas que as que ter desde pela distância d , isto é, (x_n) é sucessor de Cauchy em E se $\forall p > 0 \exists p \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq p \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq p$. Assim, um conjunto $X \subset E$ é completo se e só se é completo como espaço métrico com a distância induzida por d .

EXERCÍCIOS 1. Verifique que 1.8.4 se generaliza aos espaços seminormados, substituindo completo por seminormado e fechado

por sequencialmente fechado. Oferece uma generalização análoga para os espaços J -completos.

2. Prove que todo o e.v.t. de dimensão finita (separado ou não) é localmente convexo e completo.

E. EXTENSÃO DE APLICAÇÕES LINEARES CONTÍNUAS. Uma questão que surge frequentemente em análise é a seguinte: Sejam dados dois espaços localmente convexos E, F e uma aplicação linear contínua f de um subespaço H de E em F , e procura-se saber se existe uma aplicação linear contínua $g: E \rightarrow F$ que prolonga f ou seja tal que $f(x) = g(x), \forall x \in H$:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\text{incl.}} & E \\ f \downarrow & \swarrow g & \\ F & & \end{array}$$

O problema pode não ter solução e sendo possível pode admitir mais do que uma solução. Tem-se, no entanto, o resultado seguinte:

1.8.6. TEOR. Se H é denso em E , isto é, $\overline{H} = E$ e F é completo e separado, toda a aplicação linear contínua $f: H \rightarrow F$ prolonga-se a uma única aplicação linear contínua $g: E \rightarrow F$.

DEM. A unicidade da extensão de f resulta do seguinte princípio geral: Se duas aplicações contínuas $g_1, g_2: E \rightarrow F$ coincidem numa parte densa H de E elas coincidem em tudo o espaço E .

Na verdade, como $\overline{H} = E$, para cada $x \in E$ existe em H uma sequência $(x_j) \rightarrow x$ e como $g_1(x_j) = g_2(x_j), \forall j$, tem-se, passando ao limite e atendendo a que F é separado, $g_1(x) = g_2(x)$.

(17) É válida para espaços topológicos quaisquer E, F , F separado e chama-se, por vezes, princípio de prolongamento por continuidade das identidades.

Para provar que g existe, vamos usar a hipótese de F ser completo.

Considere um sistema fundamental de vizinhanças de zero em E , $(V_j)_{j \in J}$, em J ordenado filtrante e $V_i \subset V_j$ se $i \leq j$ (como em 3.8.5').

Para cada $x \in E$, há uma rede $(x_j)_{j \in J}$ em H que converge para x (pode tomar cada x_j na interseção $(x + V_j) \cap H$ que não é vazia), tal rede fornece uma rede de Cauchy $f(x_j)$ em F , convergente visto que F é completo; o $\lim f(x_j)$ depende só de x , pois tomando outra rede (x'_j) em H convergente para x , $x_j - x'_j \rightarrow 0$, portanto $f(x_j) - f(x'_j) \rightarrow 0$ e $\lim f(x_j) = \lim f(x'_j)$ (visto F ser separado). Assim pode-se definir uma aplicação $g: E \rightarrow F$ dando

$$g(x) = \lim f(x_j), \quad \forall x \in E,$$

e é óbvio que $g(x) = f(x)$, quando $x \in H$. Resta então provar que g é linear e contínua.

A linearidade é imediata: se $\alpha, \beta \in K$ e $x, y \in E$, tomando em H redes $(x_j)_{j \in J} \rightarrow x$ e $(y_j)_{j \in J} \rightarrow y$, das relações $f(\alpha x_j + \beta y_j) = \alpha f(x_j) + \beta f(y_j)$ vem, passando ao limite, $g(\alpha x + \beta y) = \alpha g(x) + \beta g(y)$. Para ver que g é contínua, tome-se uma sequência q sobre E , contínua; como f é linear tome-se uma sequência p sobre E , contínua; como f é linear tome-se uma sequência r sobre E , contínua. Resulta que existem uma sequência contínua p sobre E e um número $P > 0$ tais que $q[f(x)] \leq P p(x)$, $\forall x \in H$; mas esta relação estende-se a E , pois $\forall x \in E$ em H ~~uma~~ ^{uma} rede $(x_j)_{j \in J} \rightarrow x$, tem-se $q[f(x_j)] \leq P p(x_j)$, $\forall j \in J$ e passando ao limite ^{sem} $q[g(x)] \leq P p(x)$, e. q. d.

Tomando $F = K$ no teorema anterior, obtem-se o seguinte corolário:

COROLÁRIO 1. Se E é um e.l.e. e H é um subespaço denso em E , toda
a função linear contínua sobre H prolonga-se numa única forma linear
contínua sobre E .

Outra consequência importante é a seguinte:

COROLÁRIO 2. Se E, E' são e.l.e. e H, H' ^{completos e separados} subespaços de E e E' tais que
 $\overline{H} = E$ e $\overline{H'} = E'$, toda o isomorfismo $f: H \rightarrow H'$ prolonga-se num
único isomorfismo $g: E \rightarrow E'$.

[De modo mais abrangente, dois espaços localmente convexos
completos e separados com subespaços densos ~~denso~~
podem ser isomorfos.

DEM. f tem um prolongamento linear contínuo $g: E \rightarrow E'$ e
o isomorfismo inverso $f': H' \rightarrow H$ tem também um prolongamento
linear contínuo $g': E' \rightarrow E$. Das relações $f' \circ f = \text{id}_H$ e $f \circ f' = \text{id}_{H'}$
vem, atendendo a que id_H e $\text{id}_{H'}$ se prolongam em id_E e $\text{id}_{E'}$,
 $g' \circ g = \text{id}_E$ e $g \circ g' = \text{id}_{E'}$, o que prova que g e g' são isomorfismos
mutuamente inversos.

Tem-se um resultado análogo ao do Corolário 1 de 1.8.6
para seminormas:

1.8.7. TEOR. Se E é um e.l.e. e H é um subespaço denso em E ,
toda a seminorma contínua sobre H estende-se numa única
seminorma contínua sobre E .

A demonstração é análoga à de 1.8.6 e fica como exercício.

Destes teoremas resulta o seguinte corolário:

COROLÁRIO. Se H é um subespaço denso num e.l.e E e β é um sistema fundamental de vizinhanças de zero em H , as aderências $\bar{U}$ dos conjuntos $U \in \beta$ constituem um sistema fundamental de vizinhanças de zero em E .

DEM. Como toda a vizinhança fechada de zero em E contém uma $U \in \beta$ e portanto $\bar{U}$, basta provar que para qualquer $U \in \beta$, $\bar{U}$ é vizinhança de zero em E . Sem perda de generalidade, pode-se supor que U é absolutamente convexa. Seja p_U a função de Minkowski de U (em H). Em virtude de 1.8.7, p_U ~~tem sempre~~ prolonga-se numo seminormo em E como $\tilde{p}_U$ sobre E . Vemos então que $\bar{U} \supset B_{\tilde{p}_U}(0, 1)$ e portanto que $\bar{U}$ é vizinhança de zero em E . Com efeito, se $\tilde{p}_U(x) < 1$, existe uma sêde (x_j) em H tal que ~~$x_j \rightarrow x$~~ $x_j \rightarrow x$ e $p_U(x_j) < 1, \forall j$; assim, os pontos $x_j \in U$ e como $\bar{U}$ é fechado também $x \in \bar{U}$. e.q.d.

*
F. COMPLETAÇÃO DE ESPACOS LOCALMENTE CONVEXOS. Seja E um espaço localmente convexo e separado; chama-se completado de E a qualquer espaço localmente convexo completo e separado F tal que E é subespaço de F , denso em F . Do corolário 2 de 1.8.6 resulta:

1.8.9 TEOR. Dois completados de um e.l.e separado E são isomorfos; mais precisamente, se F_1 e F_2 são completos den de E , existe um isomorfismo $\varphi: F_1 \rightarrow F_2$ que conserva os elementos de E , isto é, $\varphi(x) = x, \forall x \in E$.

(1) Subentende-se que a topologia de E é induzida pela de F .

1.11. ESPAÇOS DE FUNÇÕES: $\mathcal{M}$ -TOPOLOGIAS. CONJUNTOS EQUICONTÍNUOS. TEOREMAS DE ASCOLI.

A. No que segue vamos, definir uma classe importante de topologias no espaço F^E das funções definidas num dado conjunto E e em valores num espaço localmente convexo F .

1.11.1. TEOR. Para cada conjunto $\mathcal{M}$ de pontos de E , existe uma topologia τ sobre F^E e uma só tal que uma rede $f_j \rightarrow f$ em $F^E(\tau)$ se f_j tende para f uniformemente sobre cada conjunto $M \in \mathcal{M}$, isto é, para cada $M \in \mathcal{M}$ e cada vizinhança U de zero em F existe um índice j_0 tal que

$$(1) \quad f_j(x) - f(x) \in U, \quad \forall x \in M \text{ e } \forall j \geq j_0.$$

DEM. É óbvio que só pode existir uma topologia τ sobre F^E nestas condições. Para vê-lo que existe, notemos em primeiro lugar que se háde sobre $\mathcal{M}$ fortemente à direita há a vizinhança U , pois, se não for assim, podemos substituir $\mathcal{M}$ pelo conjunto $\mathcal{M}'$ formado pelas uniões finitas dos conjuntos $M \in \mathcal{M}$. Note que, como é óbvio, uma rede $f_j \rightarrow f$ uniformemente sobre os conjuntos $M \in \mathcal{M}'$ se $f_j \rightarrow f$ uniformemente sobre os conjuntos $M \in \mathcal{M}$. Por outro lado, a condição do teorema é equivalente ^{à conjunção} às duas seguintes:

(a) τ é invariante para as translações;

(b) uma rede $f_j \rightarrow 0$ em $F^E(\tau)$ se f_j converge uniformemente para zero sobre todo o $M \in \mathcal{M}$, ou seja, para cada vizinhança U de zero em F e cada $M \in \mathcal{M}$ existe um índice j_0 tal que

$$(2) \quad f_j(M) \subset U, \quad \forall j \geq j_0.$$

Portanto, consideremos os conjuntos

$$(3) \quad \mathcal{F}(M, U) = \{ f \in F^E : f(M) \subset U \},$$

em que $M \in \mathcal{M}$ e U é vizinhança de zero em F . A coleção (2) expressa-se então por $f_j \in \mathcal{F}(M, U)$, $\forall j \geq j_0$, e é fácil ver que estes conjuntos constituem um sistema fundamental de vizinhanças de zero para uma topologia τ sobre F^E invariante para as translações. e. q. d.

A topologia τ que acabamos de definir ^{representa-se por $\tau_{\mathcal{M}}$ e} chama-se $\mathcal{M}$ -topologia sobre F^E ou topologia da convergência uniforme sobre $\mathcal{M}$.

EXEMPLOS E OBSERVAÇÕES. 1. Como vimos a topologia $\tau_{\mathcal{M}}$ é idêntica à topologia da convergência uniforme sobre as ^{$\tau_{\mathcal{M}}$} partes finitas de $\mathcal{M}$, e é também idêntica à topologia da convergência uniforme sobre todos os subconjuntos de $\mathcal{M}$, pois que $f_j \rightarrow 0$ uniformemente sobre M , $f_j \rightarrow 0$ uniformemente sobre qualquer $M' \subset M$.

2. Se $\mathcal{M}$ é o conjunto das partes de E com um só ponto, $\tau_{\mathcal{M}}$ é a topologia da convergência pontual ou seja a topologia do espaço produto F^E ; chama-se também topologia da convergência simples e representa-se por τ_s . Uma rede $f_j \rightarrow 0$ em $F^E(\tau_s)$ se $f_j(x) \rightarrow 0, \forall x \in E$. Não é ainda que τ_s é a topologia da convergência uniforme sobre as partes finitas de E . O conjunto $\mathcal{F}(A, U)$ em que A é parte finita de E e U vizinhança de zero em F , formam um sistema fundamental de vizinhanças de zero para τ_s .

3. Se M tem um único ponto $M \subset E$, $\tau_M = \tau_M$ e chama-se topologia de convergência uniforme sobre M ; é idêntica à topologia de convergência uniforme sobre todos os subconjuntos de M .

4. Se E é um espaço topológico tem interesse especial a topologia de convergência uniforme sobre os compactos de E que se representa por τ_c ; ^{se E é relativo a esta topologia} é idêntica à topologia de convergência uniforme sobre os conjuntos relativamente compactos e é claro que se E é compacto $\tau_c = \tau_E$.

5. Se E é um espaço localmente convexo, tem ainda interesse a topologia de convergência uniforme sobre os conjuntos limitados que se representa por τ_l e a de convergência uniforme sobre as partes limitadas de E , τ_p . Se E é completo $\tau_c = \tau_l$ e se é de dimensão finita $\tau_c = \tau_l = \tau_p$.

6. Se $M \subset M'$ é óbvio que τ_M é menos fina que $\tau_{M'}$. Assim, τ_E (topologia de convergência uniforme sobre E) é a mais fina das M -topologias e τ_s é a menos fina das M -topologias tais que $\bigcup M = E$. Vê-se ainda que se E é localmente convexo $\tau_c \subset \tau_l \subset \tau_p$.

Vejamos agora algumas propriedades das M -topologias sobre F^E .

1.11.2. TEOR. (a) A topologia τ_M sobre F^E torna contínuas a adição $f+g$ e as homotetias $f \rightarrow \lambda f$, $\lambda \in K$.

(b) A topologia τ_M sobre F^E tem um sistema fundamental de vizinhanças de zero absolutamente convexas e fechadas e invariante para as homotetias.

(e) A topologia τ_M sobre F^E é localmente convexa se todas as funções $f: E \rightarrow F$ são limitadas em qualquer conjunto $M \in \mathcal{M}$, isto é, $\forall f \in F^E \perp \forall M \in \mathcal{M}, f(M)$ é limitada em F .

(d) Se F é separável e $\bigcup \mathcal{M} = E$, τ_M é separável.

(f) Se F é completo e $\bigcup \mathcal{M} = E$, F^E com a topologia τ_M é um espaço completo.

DEM. (a). Tendo em conta que τ_M é invariante com as translações bastam provas que se $(f_j)_{j \in J}$ e $(g_j)_{j \in J}$ são nítidas em F^E uniformemente convergentes para zero sobre cada $M \in \mathcal{M}$, o mesmo acontece com $f_j + g_j$ e λf_j , o que é imediato.

(b). Supondo $\mathcal{M}$ filtrante à direita, o que é sempre possível, os conjuntos $\mathcal{F}(M, U)$, em que $M \in \mathcal{M}$ e U é vizinhança absolutamente convexa fechada de zero em F , constituem um sistema fundamental de vizinhanças de zero para τ_M .

Basta então provar que estes conjuntos são absolutamente convexos, fechados e que para qualquer $\lambda \neq 0$, $\lambda \mathcal{F}(M, U) = \mathcal{F}(M, \lambda U)$. Ora se $f, g \in \mathcal{F}(M, U)$ e $|\alpha| + |\beta| \leq 1, \alpha, \beta \in K$,

dos membros $f(M) \subset U, g(M) \subset U$ vem

$$(\alpha f + \beta g)(M) \subset \alpha f(M) + \beta g(M) \subset \alpha U + \beta U \subset U$$

o que prova que $\mathcal{F}(M, U)$ é absolutamente convexo. Verifica-se que é fechado. Trata-se de provar que se uma nítida $f_j \rightarrow f$ em $F^E(\tau_M)$ e as funções $f_j \in \mathcal{F}(M, U)$, também $f \in \mathcal{F}(M, U)$. Ora existe um índice j_0 , tal que para $j \geq j_0$ e $x \in M$, $f_j(x) \in U$,

mas
 Como U é fechado, isto implica $f(x) \in U, \forall x \in M$. Para a
 última relação bastará provar que $\lambda F(M, U) \subset F(M, \lambda U)$
 o que é imediato.

(c). Em virtude de (b) e de 1.2.2 ~~basta~~ a topologia τ_M
 é localmente convexa se os conjuntos $F(M, U)$ formam uma base.
 Ora se para cada $M \in \mathcal{M}$ e cada vizinhança U de zero em F ,
 $F(M, U)$ é absorvente, tomando $f \in F^E$, existe $p > 0$ tal
 que $f \in pF(M, U) = F(M, pU)$, mas esta condição é equivalente
 a $f(M) \subset pU$ o que prova que $f(M)$ é limitado em F .
 De modo análogo se prova a métrica.

(d). Em virtude ^{de} (b) o espaço F^E com a topologia τ_M é
 regular; basta então provar que toda F fechada a
 interseção de todos as vizinhanças $F(M, U)$ ~~se contém~~
 contém a função nula. Sejam então $f \in \bigcap F(M, U)$;
 Como $\mathcal{M}$ é em E , para cada $x \in E$ existe um $M \in \mathcal{M}$
 tal que $x \in M$; assim, $f(x) \in U$ qualquer que seja
 a vizinhança U e portanto $f(x) = 0$, visto F ser fechado.

(e). Como os espaços $F^E(\tau_M)$ não são em geral localmente
 convexos esta propriedade exige definições novas de núcleos
 de Cauchy e de espaços completos. Elas são análogas às
 dadas para os espaços localmente convexos. Assim uma
 série f_j em $F^E(\tau_M)$ diz-se de Cauchy se para vizinhança
 de zero W existe um índice j_0 tal que $f_j - f_p \in W$,
 $\forall j, p \geq j_0$. Uma parte X de $F^E(\tau_M)$ diz-se completa

se trata a rede de Cauchy em X converge para uma função $f \in X$.

Posto isto, considere-se uma rede de Cauchy f_j em $F^E(\tau_m)$; existe então para cada vizinhança U de zero em F que se pode supor fechada e cada $M \in \mathbb{N}$ um índice j_0 tal que $f_j - f_l \in F(M, U)$ para $j, l \geq j_0$ ou seja

$$(3) \quad f_j(x) - f_l(x) \in U, \quad \forall x \in M, \quad \forall j, l \geq j_0.$$

Assim, para cada $x \in E$, $f_j(x)$ é rede de Cauchy em F e como este espaço é completo ela tem um limite $f(x)$.

Defina-se assim uma função $f \in F^E$ e de (3) vem atendendo a que U é fechada $f(x) - f_l(x) \in U, \forall x \in M$ e $\forall l \geq j_0$, donde se conclui que $f_j \rightarrow f$ na topologia τ_m c.q.d.

OBSERVAÇÕES. 1. Note-se que para as topologias τ_m em F^E a aplicação $\lambda \rightarrow \lambda f$ do corpo de escalares K em F^E em geral não é contínua; a continuidade desta aplicação, para cada $f \in F^E$, é em si mesma facilmente cf. 1.1.1, equivalente a de as vizinhanças ^{de zero} serem absorventes.

2. Prova-se facilmente o que deixamos como exercício que se E é um conjunto infinito e F é fechado, a topologia de convergência uniforme sobre E não é localmente convexa.

3. Da propriedade (c) do teorema anterior resulta

Imediatamente que a topologia de convergência é contínua τ_s sobre F^E e' localmente convexa o que já era conhecido.

6) Tenemos seguinte generaliza a propriedade (c) e demonstramos do mesmo modo:

1.11.3. TEOR. Se H e' um subespaço recetivo de F^E , a topologia τ_{rec} sobre H (ou seja a topologia induzida por τ_{rec} em H) e' localmente convexa se e só se cada ponto $f \in H$ e' limitado sobre cada conjunto $M \in \mathcal{M}$.

Se E e' um espaço topológico, desquise em $C(E, F)$ o subespaço de F^E formado pelas aplicações contínuas de E em F . Temos em $C(E, F)$ as seguintes:

COROL. O espaço $C(E, F)$ com a topologia de convergência compata e' um espaço localmente convexo.

Vem-se a ver facilmente

1.11.4. TEOR. Se H e' um subespaço recetivo de F^E nos condições de 1.11.3, e S e' um sistema de seminormas que define a topologia de F , a topologia τ_{rec} sobre H e' definida pelos seminormas

$$p_M(f) = \sup_{x \in M} p(f(x)), \quad p \in S, M \in \mathcal{M} \text{ e } f \in H.$$

Por exemplo se F e' um espaço normado e E um espaço topológico a topologia de convergência compacta

sobre $C(E, F)$ é definida pelas seminormas $\|f\|_0 = \sup_{x \in \Delta} \|f(x)\|_F$,
 em que Δ é compacto de E . No caso particular, em que F é
 compacto a topologia τ_c sobre $C(E, F)$ (que é idêntica à topologia
 da convergência uniforme sobre E) é definida pelas normas

$$\|f\| = \sup_{x \in E} \|f(x)\|_F$$

Recorde que uma sucessão de compactos $\Delta_1, \dots, \Delta_m, \dots$ num
 espaço topológico E diz-se exaustiva se é crescente, isto é,
 $\Delta_1 \subset \dots \subset \Delta_m \subset \dots$ e cada compacto de E está contido num dos
 Δ_m . Um espaço localmente compacto separado com uma base
 numerável de abertos (em particular, todo o aberto de $\mathbb{R}^n$)
 tem uma sucessão exaustiva de compactos. Tem-se:

1.11.5. TEOR. Se F é um espaço localmente convexo metriza-
 vel e E é um espaço topológico com uma sucessão exaustiva
 de compactos, $C(E, F)$ com a topologia da convergência compacta
 é também um espaço localmente convexo metriza-vel.

Com efeito se $p_1, \dots, p_m, \dots$ é uma sucessão de seminormas
 que define a topologia de F e $\Delta_1 \subset \dots \subset \Delta_m \subset \dots$ é uma sucessão
 exaustiva de compactos de E , a topologia de $C(E, F)$ é definida pelas
seminormas

$$p_{m,m}(f) = \sup_{x \in \Delta_m} p_m(f(x)), \quad m, m' \in \mathbb{N},$$

pois p_m num sem eutério equivalente ao das seminormas
 $p_{m,\Delta}(f) = \sup_{x \in \Delta} p_m(f(x))$, em que Δ percorre o conjunto de todos
 os compactos de E . Particularizações importantes

Em particular, se Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$, o
 espaço dos funções contínuas $C(\Omega, K)$ (reais ou
 complexas em que $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) com a topologia

de convergência compacta e metrizável.

Para terminar este estudo do espaço $C(E, F)$ vamos provar:

1.11.6. TEOR. Sejam E um espaço localmente convexo e F um espaço topológico. Então:

(a). Se uma rede de funções contínuas $f_j: E \rightarrow F$ converge uniformemente sobre um compacto $M \subset E$ para uma função $f: E \rightarrow F$, a restrição $f|_M: M \rightarrow F$ é contínua.

(b). Se E é localmente compacto, $C(E, F)$ é fechado em F^E para a topologia da convergência compacta.

(c). E é localmente compacto e F é completo, $C(E, F)$ com a topologia da convergência compacta é também completo.

DEM (a) "i" Considere-se ^{um ponto $x_0 \in M$. Para} uma vizinhança U de F absolutamente convexa em F existe um índice j_0 tal que

$$(\alpha) \quad f_j(x) - f(x) \in \frac{1}{3} U, \quad \forall j \geq j_0 \text{ e } \forall x \in M.$$

Como f_{j_0} é contínua em x_0 , existe uma vizinhança V deste ponto em E tal que

$$(\beta) \quad f_{j_0}(x) - f_{j_0}(x_0) \in \frac{1}{3} U, \quad \forall x \in V.$$

Assim de (α) e (β) vem, para $x \in V \cap M$,

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= f(x) - f_{j_0}(x) + f_{j_0}(x) - f_{j_0}(x_0) + f_{j_0}(x_0) - f(x_0) \\ &\in \frac{1}{3} U + \frac{1}{3} U + \frac{1}{3} U = U, \end{aligned}$$

O que prova que $f|_M$ é contínua em x_0 . c.f.d.

(b). Considere-se uma rede f_j em $C(E, F)$ convergente para uma

(1) A propriedade (a) generaliza um resultado conhecido, todo o limite uniforme de funções contínuas ^{sobre um compacto} sobre um espaço X é uma função contínua sobre X .

função $f: E \rightarrow F$ na topologia τ_c . Como E é localmente compacto, cada ponto x de E tem uma vizinhança V_x compacta e de (a) resulta que as restrições de f a estas vizinhanças são contínuas. Isto é suficiente para concluir que $f \in C(E, F)$ e que, portanto, $C(E, F)$ é fechado em $F^E(\tau_c)$. c.q.d.

(e). Resulta imediatamente de (b) e de que F^E é completo para a topologia τ_c .

OBS: Note-se que $C(E, F)$ não é em geral fechado em F^E para a topologia τ_s de convergência simples: se uma rede de funções contínuas $f_j: E \rightarrow F$ converge pontualmente para $f: E \rightarrow F$, f não é em geral contínua (é um caso bem conhecido). Consequentemente com outras topologias e espaços com τ_c quando E não é localmente compacto.

COROL. Se F é um espaço localmente convexo completo e E um espaço compacto, $C(E, F)$ com a topologia de convergência uniforme sobre E é também completo.

EXERCÍCIO. Se E um espaço localmente convexo e F um completo qualquer. Considere o espaço $B(E, F)$ dos funções $f: E \rightarrow F$ limitadas ou seja tais que $f(E)$ é limitado em F . Mostre que $B(E, F)$ é fechado em F^E para a topologia τ_E . Deduza daí que sendo F completo, $B(E, F)$ com a topologia de convergência uniforme sobre E é também completo. ~~Recomenda-se~~
estes resultados

B. PARTES EQUICONTÍNUAS DE F^E No que segue supõe-se sempre que F é um espaço localmente convexo e que E é um espaço topológico.

Um conjunto de funções $\Phi \in F^E$ diz-se equicontínuo num ponto $x_0 \in E$ se para cada vizinhança U de zero em F , existe uma vizinhança V de x_0 em E tal que se tem

$$f(x) - f(x_0) \in U, \quad \forall x \in V \text{ e } \forall f \in \Phi.$$

No caso em que E é normado este conceito traduz-se em: para cada $\delta > 0$, existe uma vizinhança V de x_0 em E tal que $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \delta, \forall x \in V \text{ e } \forall f \in \Phi$.

O conjunto Φ diz-se equicontínuo se é equicontínuo em cada ponto de E . Da definição resulta imediatamente que se Φ é equicontínuo num ponto x_0 , então as funções $f \in \Phi$ são contínuas em x_0 . Assim, se Φ é equicontínuo, então as funções de Φ são contínuas (em E). Por outras palavras entre as partes equicontínuas de F^E estão

contidas em $C(E, F)$. Note-se ainda que a propriedade de um conjunto $\Phi \subset F^E$ ser equicontínuo depende só das topologias de E e F .

Fácilmente se verifica que toda a parte finita de $C(E, F)$ é equicontínua; se Φ, Ψ são partes equicontínuas de $C(E, F)$ o mesmo acontece com $\Phi + \Psi$ e $\lambda \Phi, \forall \lambda \in K$.

1.11.7. TEOR (1-º lem. de Ascoli). Se Φ é 'uma parte equicont'
me de F^E (ou o que dá ao mesmo de $C(E, F)$), a sua aderência
 $\overline{\Phi}$ tem a topologia de convergência simples e equicontinua.

DEM. Vamos provar mais geralmente que se Φ é equicontinua
 num ponto $x_0 \in E$, $\overline{\Phi}$ é equicontinua no mesmo ponto. Tome-se
 uma vizinhança U de 0 em F absolutamente convexa e
 seja V uma vizinhança de x_0 em E tal que

$$(\alpha) \quad f(x) - f(x_0) \in \frac{1}{3}U, \quad \forall x \in V \text{ e } \forall f \in \Phi.$$

Para cada $g \in \overline{\Phi}$, existe uma sêc. f_j em Φ tal que $f_j \rightarrow g$
 pontualmente e pode-se associar, portanto, a cada $x \in V$
 um índice j de modo que se tem ao mesmo tempo,
 $g(x) - f_j(x) \in \frac{1}{3}U$ e $g(x_0) - f_j(x_0) \in \frac{1}{3}U$. Destas relações
 e de (α) vem

$$\begin{aligned} g(x) - g(x_0) &= (g(x) - f_j(x)) + (f_j(x) - f_j(x_0)) + (f_j(x_0) - g(x_0)) \\ &\in \frac{1}{3}U + \frac{1}{3}U + \frac{1}{3}U = U, \end{aligned}$$

O que prova que $\overline{\Phi}$ é equicontinua em x_0 . C. q. d.

COROL. 1. Se $\Phi \subset F^E$ é equicontinua, a aderência de Φ tem
 a topologia de convergência simples em F^E e a mesma que a
 aderência de Φ tem a topologia de convergência simples sobre $C(E, F)$.

Pois que $\overline{\Phi}$ tem equicontinua está contido em $C(E, F)$.

COROL. 2. Se uma sêc. de funções contínuas $f_j: E \rightarrow F$ é
 equicontinua e converge pontualmente para uma função
 $f: E \rightarrow F$, f é contínua.

O contrário anterior da' sem entendi há que o limite pontual de funções contínuas em E não são funções contínuas em E , distintos do da convergência uniforme sobre E . Uma série f_j de funções contínuas pode convergir uniformemente sobre E e não ser equicontínua e, inversamente, pode ser equicontínua e convergir pontualmente sem que converja uniformemente sobre E (no entanto ^{nesta caso} converge uniformemente sobre os compactos de E , como se nos teremos seguinte).

1.11.8. TEOR (2º Teorema de Ascoli). Se Φ é um conjunto equicontínuo de funções $E \rightarrow F$, as topologias τ_c da convergência compacta e τ_0 de convergência compacta sobre Φ são idênticas.

Este teorema é consequência da seguinte sem tanto mais geral.

1.11.8' TEOR. Se $\Phi \subset F^E$ é equicontínuo e E_0 é uma parte densa de E a topologia de convergência pontual ^{1º} nos pontos de E_0 e a topologia de convergência compacta sobre Φ são idênticas.

DEM. Como τ_0 é mais fina que τ_c , bastará provar que τ_0 é também mais fina que τ_c (sobre Φ) ou seja o que é equivalente: se uma série $f_j \in \Phi \rightarrow f \in \Phi$ nos pontos de E_0 , $f_j \rightarrow f$ uniformemente sobre cada compacto A de E .

Seja U uma vizinhança de zero em F , absolutamente convexa; a cada $x \in E$ corresponde uma vizinhança aberta V_x de x

(1) Melhor seria dizer da convergência uniforme sobre os pontos de E_0 , mas é mais fácil, quando se trata de conjuntos reduzidos a um ponto, usar o adjectivo "pontual" em vez de "uniforme".

em E tal que as funções $h \in \Phi$ verificam $h(y) - h(x) \in \frac{1}{5}U$,
 $\forall y \in V_x$; em particular:

$$(\alpha) \quad \begin{cases} f_j(y) - f_j(x) \in \frac{1}{5}U \\ f(y) - f(x) \in \frac{1}{5}U \end{cases}, \quad \forall y \in V_x, \forall j.$$

Considere-se um compacto Δ de E . Existe em Δ um número finito de pontos $x_1, \dots, x_m$ tal que Δ é coberto pelas vizinhanças $V_{x_1}, \dots, V_{x_m}$. Como E_0 é denso em E , existe em cada V_{x_i} um ponto $y_i \in E_0$, $i = 1, \dots, m$. Assim, como $f_j(y_i) \rightarrow f(y_i)$, pode-se determinar um índice j_0 tal que se tem

$$(\beta) \quad f_{j_0}(y_i) - f(y_i) \in \frac{1}{5}U, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall j \geq j_0.$$

Portanto, dado um ponto qualquer $y \in \Delta$, y pertence a uma das vizinhanças V_{x_i} ; decompondo $f_j(y) - f(y)$ do seguinte modo, com $j \geq j_0$,

$$\begin{aligned} f_j(y) - f(y) &= (f_j(y) - f_j(x_i)) + (f_j(x_i) - f_j(y_i)) + (f_j(y_i) - f(y_i)) \\ &\quad + (f(y_i) - f(x_i)) + (f(x_i) - f(y)) \end{aligned}$$

Cada uma das parcelas do segundo membro verifica (α) ou (β) e está portanto em $\frac{1}{5}U$. Tem-se então: $f_j(y) - f(y) \in U$, $\forall j \geq j_0$ e $\forall y \in \Delta$, o que prova que $f_j \rightarrow f$ uniformemente sobre Δ . c.q.d.

COROL. 1. Se uma série equicontinua $f_j \in C(E, F) \rightarrow f \in C(E, F)$ nos pontos de uma parte densa E_0 de E , $f_j \rightarrow f$ uniformemente sobre cada compacto de E .

Basta aplicar o teorema ao conjunto formado por f e pelos f_j que é então também equicontinuo.

Note-se que se $E = E_0$, mas é necessário ter em mente que a função limite f é contínua, isto é consequência de (f_j) ser equicontínua (Corol. de 1.11.7). Porém, se $E_0 \neq E$ podem existir seqs f_j equicontínuas que converjam em cada ponto de E_0 para uma função não contínua.

COROL. 2. Para qualquer conjunto equicontínuo $\Phi \subset F^E$ ser equicontínuo: Φ é compacto para τ_s , Φ é compacto para τ_c .

1.11.9. TEOR (3º Ten. de Ascoli). Se F é separado, qualquer conjunto Φ de funções $E \rightarrow F$ que reunha as condições;

(a) Φ é equicontínuo

(b) Para cada $x \in E$, $\Phi(x) = \{f(x) : f \in \Phi\}$ é relativamente compacto em F ,

é relativamente compacto em (F, F) para a topologia τ_c .

DEM. Da relação $\Phi \subset \prod_{x \in E} \Phi(x)$, deduz-se que a coleção

(b) é equivalente a Φ ser relativamente compacto para τ_s em F^E . Como Φ para τ_s é equicontínuo e compacto para τ_s do Corol. 2 da tese anterior vem o resultado.

Note-se que se tem sempre que é compacto também se tem a tese de Ascoli pode ser enunciada da seguinte modo:

1.11.9'. TEOR. Se F é um e.l.e. separado e E é um espaço topológico, para qualquer $\phi \in C(E, F)$,

ϕ é equicontínuo e relativamente compacto para $\tau_\beta \Rightarrow \phi$ relativamente compacto para τ_c em $C(E, F)$

Pois se a condic. $\phi(x)$ relativamente compacto em F , $\forall x \in E$ equivale a ϕ ser relativamente compacto para τ_β .

[OBS. Provamos ~~que~~, ~~que~~ deixamos como exercício, que o recíproco do 3-º teorema de Ascoli ou o que dá nos mesmos de 1.11.9' e' válida se E é localmente compacto.

COROL. 1. Se F é um e.l.e. metrizável e E é um espaço topológico com uma base numerável de compactos, para cada sucessor de funções contínuas $f_n: E \rightarrow F$ que

(a) é equicontínuo,

(b) para cada $x \in E$, $\{f_n(x): n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto em F

existe uma subsucessor f_{n_k} e uma função contínua $f: E \rightarrow F$

tal que $f_{n_k} \rightarrow f$ uniformemente sobre cada compacto de E .

Basta ter em conta que neste caso o espaço $C(E, F)$ com a topologia τ_c é metrizável (Ten.).

Se F é de dimensão finita e separado, em particular $F = \mathbb{K}$, a condic. (b) equivale a $f_n(x)$ ser limitada em E , para cada $x \in E$. Tem-se assim, para sucessos equicontínuos de funções reais ou complexas:

COROL. 2. Se E é um espaço topológico com uma base numerável de compactos, de toda a sucessor $f_n: E \rightarrow \mathbb{K}$ equicontínuo e limitado em cada ponto $x \in E$ ($f_n(x)$ limitada) há de se extrair

uma subsequência f_{m_k} que converge para uma função contínua $f: E \rightarrow K$ uniformemente sobre cada compacto de E .

Os corolários 1 e 2 valem no caso particular em que E é um aberto ou compacto de $\mathbb{R}^n$. No caso em que E é compacto, o corolário 2 é conhecido na análise com o nome de Teorema de Arzelà ou de Arzelà-Ascoli.

Vejamos algumas aplicações dos teoremas precedentes.

A.1. ESPAÇOS DE FUNÇÕES HOLOMORFAS. TEOREMA DE MONPEL. Considere $K = \mathbb{C}$ um aberto Ω de $\mathbb{C}$ e seja $H(\Omega)$ o espaço das funções holomorfas $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$; $H(\Omega)$ é um subespaço do espaço $C(\Omega) = C(\Omega; \mathbb{C})$ das funções complexas contínuas e definidas em Ω . Como K é $\mathbb{C}$, Ω tem uma cobertura exaustiva de compactos $D_1 \subset \subset D_2 \subset \subset \dots$ e a topologia de convergência compacta sobre $C(\Omega)$ é definida pelos seminormas:

$$\|f\|_{D_n} = \sup_{z \in D_n} |f(z)|;$$

a topologia de convergência compacta em $H(\Omega)$ é definida pelas restrições a $H(\Omega)$ destas seminormas.

A.1.1. TEOR. $H(\Omega)$ é fechado em $C(\Omega)$ para a topologia da convergência compacta.

DEM. Como $C(\Omega)$ é metrizável (com a topologia τ_c) basta mostrar que uma sequência de funções holomorfas $f_m: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ converge uniformemente sobre cada compacto D de Ω para uma função $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ contínua.

(1) Não é preciso supor que f é contínua, pois $C(\Omega)$ é fechado em $\mathbb{C}^\Omega$ para τ_c (Ten...)

f é holomorfa. Pelo lema de Morera basta mostrar que
 para qualquer linha fechada L (localmente C^1) situada
 numa bola aberta $B(z_0, \rho) \subset \Omega$, $\int_L f(z) dz = 0$. Como tem-se
 para cada n , $\int_L f_n(z) dz = 0$ ~~o mesmo~~, mas como $f_n \rightarrow f$
 uniformemente sobre L , $\int_L f(z) dz = \lim \int_L f_n(z) dz = 0$. c.q.d.

COROL. $H(\Omega)$ com a topologia da convergência compacta é um
espaço metrizável e completo (portanto, um espaço de
 Fréchet).

Porque assim é $C(\Omega)$ com a topologia τ_c .

O lema anterior é uma parte do lema de Weierstrass⁽³⁾
 para as funções holomorfas:

Se uma sequência de funções holomorfas $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tende
 uniformemente sobre cada compacto $D \subset \Omega$ para uma função
 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, f é holomorfa e as derivadas f'_n convergem
 para a derivada f' também uniformemente sobre cada compacto
 de Ω .

A segunda parte deste lema mostra que:

A.1.2. TEOR. Supondo $H(\Omega)$ com a topologia da convergência
 compacta o operador de derivadas $D: H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ é linear
contínuo.

(3) Ver por exemplo "Análise Superior", S. Silva.

Um dos tópicos mais profundos da Análise Complexa é o seguinte Teorema de Montel:

A.1.3. TEOR (Montel). Se seme sucesor de funções holomorfas

$f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é limitada sobre cada compacto de Ω , este é,
para cada compacto $\Delta \subset \Omega$, existe um número $L_\Delta \geq 0$
tal que

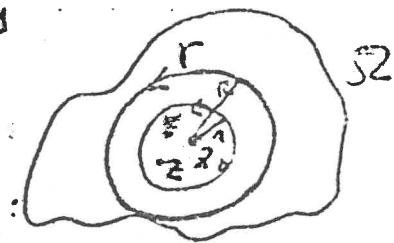
$$|f_n(z)| \leq L_\Delta, \quad \forall z \in \Delta, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

existe uma subsucessor (f_{n_k}) de (f_n) e uma função holomorfa

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f_{n_k} \rightarrow f$ uniformemente sobre cada compacto
de Ω .

DEM. Notemos que a condição de limitação sobre f_n implica em particular que $f_n(z)$ é limitada em cada ponto $z \in \Omega$; então em virtude do Corol. 2 do 3º Teorema de Ascoli basta mostrar que (f_n) é equicontínua,
 pois sendo assim ele tem uma subsucessor f_{n_k} uniformemente
 convergente sobre cada compacto de Ω para uma função contínua $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$
 a qual é holomorfa em virtude de A.1.1

Seja então $z_0 \in \Omega$. Considere-se
 uma bola fechada $\Delta = D(z_0, R) \subset \Omega$,
 $R > 0$ e seja γ a fronteira orientada
 no sentido ~~de~~ directo (circunferência



de raio R e centro z_0). Tome-se um número $\delta > 0$ e
 Considere-se uma bola $D(z_0, r)$ com $r < R$. Pela fórmula
 Integral de Cauchy vem, para quaisquer n e qualquer
 $z \in D(z_0, r)$:

$$f_m(z) - f_m(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f_m(u) \frac{z - z_0}{(u - z)(u - z_0)} du;$$

usando a fórmula de majoração do integral e tendo em conta que sobre γ , $|f_m(u)| \leq L_D$ e $|u - z|, |u - z_0| \geq R - r$, vem

$$|f_m(z) - f_m(z_0)| \leq RL_D \frac{r}{(R-r)^2}$$

e, portanto, $|f_m(z) - f_m(z_0)| \leq \delta$, desde que se tome r pela condição $r/(R-r)^2 \leq \delta/RL_D$, o que é sempre possível visto que $r/(R-r)^2 \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$. Provamos assim que f_m é equicontínua em qualquer $z_0 \in \Omega$, o que terminava a demonstração.

Note-se que a condição de limitação imposta a f_m no teorema é a condição para que f_m seja limitada no espaço localmente convexo que se obtém munido $H(\Omega)$ com a topologia da convergência compacta. Na verdade ele é equivalente a $\|f_m\|_D$ ser limitado para compactos $D \subset \Omega$. Tendo em conta que $H(\Omega)$ é metrizável no τ -e e que o teorema de Montel é equivalente ao seguinte:

A 1.4. TEOR. No espaço $H(\Omega)$ (com a topologia da convergência compacta) todo o conjunto limitado é relativamente compacto.

{ Com as relações compacto $\Leftrightarrow$ limitado pode-se dizer que em $H(\Omega)$ são equivalentes ~~as noções de~~ as noções de limitado e de relativamente compacto.

1.12. ESPAÇOS DE APLICAÇÕES LINEARES CONTÍNUAS. A. Vámos

agora consideramos dois espaços localmente convexos E e F . O espaço das aplicações lineares de E em F designa-se por $\text{Hom}(E, F)$ e o das aplicações lineares contínuas de E em F , por $L(E, F)$.

(Note-se que $\text{Hom}(E, K)$ é o dual algébrico E' de E e $L(E, K)$ é o dual topológico E').

De 1.11.3. resulta:

1.12.1. Teor. Se $\mathcal{M}$ é um conjunto de hets limitados de E a $\mathcal{M}$ -topologia sobre $L(E, F)$ é localmente convexa.

Com efeito, toda a aplicação linear contínua $u: E \rightarrow F$ transforma limitados de E em limitados de F .

(Note-se que, em geral, uma $\mathcal{M}$ -topologia sobre $\text{Hom}(E, F)$ não é localmente convexa (mesmo que os conjuntos de $\mathcal{M}$ sejam limitados).

Estemos particularmente interessados no estudo das $\mathcal{M}$ -topologias sobre $L(E, F)$ em que $\mathcal{M}$ é formado de hets limitados de E que em F acabam de ser localmente convexos. Nesta hipótese destacamos a topologia $\mathcal{E}_s$ da convergência simples, $\mathcal{E}_c$ da convergência compacta, $\mathcal{E}_u$ da convergência uniforme nos pré-compactos e a mais fina de todas: a topologia $\mathcal{E}_p$ de convergência uniforme nos limitados de E . De acordo com 1.11.4, se S é um sistema de seminormas que define a topologia de F , a topologia $\mathcal{E}_p$ sobre $L(E, F)$ é definida de hets seminormas

$$(1) \quad p_M(u) = \sup_{x \in M} h(u(x)), \quad h \in S, \quad M \in \mathcal{M}.$$

(1) Com termos p_M ^{h'ou} continuamos a designar pelo mesmo símbolo uma $\mathcal{M}$ -topologia sobre F e a que ele induz em $L(E, F)$, salvo se houver risco de confusão.

Como vimos como $\mathcal{T}_G$ - topologia mais ampla se substituímos $\mathcal{T}_G$ pelo conjunto das reuniões finitas de elementos de $\mathcal{T}_G$, o que permite supor $\mathcal{T}_G$ filtrante à direita; e mais ampla também se em vez de $\mathcal{T}_G$ se considera a classe de todos os subconjuntos de conjuntos de $\mathcal{T}_G$. Para o caso do espaço $L(E, F)$ tem-se ainda:

1.12.2. TEOR. Se $\mathcal{T}_G$ e $\mathcal{T}_G'$ são conjuntos de partes limitadas de E , as topologias $\mathcal{T}_{\mathcal{T}_G}$ e $\mathcal{T}_{\mathcal{T}_G}'$ sobre $L(E, F)$ são idênticas nos seguintes casos:

(a). $\mathcal{T}_G'$ é o conjunto dos homotéticos de raios > 0 dos conjuntos de $\mathcal{T}_G$; $\mathcal{T}_G' = \{pM : p > 0 \text{ e } M \in \mathcal{T}_G\}$.

(b). $\mathcal{T}_G'$ é o conjunto das aderências dos conjuntos de $\mathcal{T}_G$; $\mathcal{T}_G' = \{\bar{M} : M \in \mathcal{T}_G\}$.

(c). $\mathcal{T}_G'$ é o conjunto dos envólucros absolutamente convexos dos $M \in \mathcal{T}_G$; $\mathcal{T}_G' = \{ac(M) : M \in \mathcal{T}_G\}$.

(d). $\mathcal{T}_G'$ é o conjunto dos envólucros absolutamente convexos fechados dos conjuntos de $\mathcal{T}_G$; $\mathcal{T}_G' = \{\overline{ac(M)} : M \in \mathcal{T}_G\}$.

DEM. Note-se que (d) é consequência de (b) e (c). ^{Pode-se provar} Para (a), (b) e (c) mostrando que se S é um sistema de seminormas que define a topologia de F , em cada caso, os sistemas de seminormas $\{h_M\}_{M \in \mathcal{T}_G, h \in S}$ e $\{h_{M'}\}_{M' \in \mathcal{T}_G', h \in S}$ são equivalentes. Para isto, bastará provar que, para qualquer $M \in E$, limitado, $h_{pM} = p h_M$, $p > 0$, $h_{\bar{M}} = h_M$ e $h_{ac(M)} = h_M$; o que deixamos como exercício.

Em virtude de 1.11.2 (d), $\mathcal{M}$ é um conjunto de bases de E tal que $U\mathcal{M} = E$ e F é separado a topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ sobre $L(E, F)$ (e também sobre $\text{Hom}(E, F)$) e é separado.

1.12.3. TEOR. Se F é separado, toda a rede de aplicações lineares $\mu_j: E \rightarrow F$ que converge pontualmente tem por limite uma aplicação linear $\mu: E \rightarrow F$.

DEM. Com efeito, se $\alpha, \beta \in K$ e $x, y \in E$, tem-se, para cada j , $\mu_j(\alpha x + \beta y) = \alpha \mu_j(x) + \beta \mu_j(y)$ donde vem, passando ao limite e tendo em conta que F é separado, $\mu(\alpha x + \beta y) = \alpha \mu(x) + \beta \mu(y)$. e. s. d.

COROL. Se $U\mathcal{M} = E$ e F é separado, $\text{Hom}(E, F)$ é fechado em F^E para a topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$; e além disso, F é completo, $\text{Hom}(E, F)$ com $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ é completo.

Com efeito, em virtude de 1.12.3, $\text{Hom}(E, F)$ é fechado em F^E para $\mathcal{T}_3$ e portanto, para $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ (que é mais fina que $\mathcal{T}_3$). A última parte resulta de 1.11.2. (e).

Note-se que em geral, $L(E, F)$ não é fechado em F^E para as $\mathcal{M}$ -topologias mesmo que os conjuntos $M \in \mathcal{M}$ sejam limitados, embora E e F estejam separados; mesmo assim. Em certos casos porém $L(E, F)$ é fechado para a topologia $\mathcal{T}_3$ de convergência uniforme em todos os limitados de E . Para estudar este facto, introduzimos a seguinte definição: Um espaço localmente convexo E diz-se

bornológico se trata o conjunto absolutamente convexo que absorve todas as partes limitadas e vizinhanças de zero.

1.12.4. TEOR. Todo o espaço localmente convexo metrizable é bornológico.

Em particular, os espaços normados são bornológicos.

DEM. Seja $U_1 \supset \dots \supset U_n \supset \dots$ um sistema fundamental de vizinhanças de zero em E absolutamente convexas e $A \in E$ absolutamente convexo que absorve todas as partes limitadas.

Vamos ver que existe um inteiro n tal que $A \supset \bar{\alpha}^n U_n$.
Se não for assim, então para cada n existe uma sequência limitada, tal que $\bar{\alpha}^n x_n \notin A$, $\forall n$, o que é absurdo visto que A absorve $\{x_n\}$. e.g.d.

1.12.5. TEOR. Se E é bornológico e F localmente convexo, toda a aplicação linear $u: E \rightarrow F$ que transforma as limitadas de E em limitadas de F é contínua.

DEM. Seja V vizinhança de zero absolutamente convexa em F .
 $u^{-1}(V)$ é um conjunto absolutamente convexo em E e absorve toda a parte limitada M de E . Com efeito, pela hipótese da tese, $u(M)$ é limitado em F , portanto, é absorvido por V , mas isto implica que M é absorvido por $u^{-1}(V)$. Como E é bornológico, $u^{-1}(V)$ é vizinhança de zero em E e u é, portanto, contínua. e.g.d.

Voltamos a questões que estamos tratando:

1.12.6. TEOR. Se E é bornológico e F é separado, ~~se E é limitado~~, $L(E, F)$ é fechado em F^E para a topologia τ_β de convergência uniforme nos pontos limitados de E .

Dem. Basta provar que se $\{u_\alpha\}$ é uma série de aplicações lineares contínuas (1) $u_\alpha: E \rightarrow F$ converge uniformemente sobre cada $M \in \mathcal{M}$ para uma função $u: E \rightarrow F$, a função u é limitada sobre cada $M \in \mathcal{M}$. Pois que, sendo assim, como u é linear (1.12.3, Corol) é contínua, como F é bornológico. ~~Se u é uma sequência~~ u é contínua sobre F e $M' \in \mathcal{M}$. Dado $\delta > 0$, ~~existe um~~ existe um índice j tal que $\|u_j(x) - u(x)\| \leq \delta, \forall x \in M$; Como u_j é limitada sobre M , existe também $L > 0$ tal que $\|u_j(x)\| \leq L, \forall x \in M$. Das relações vem

$$\|u(x)\| \leq \|u(x) - u_j(x)\| + \|u_j(x)\| \leq \delta + L, \forall x \in M, \text{ o que prova que } u \text{ é limitada sobre } M. \text{ c.q.d.}$$

COROL. Se E é bornológico (em particular, metrizable) e F é separado, ~~se E é limitado~~ $L(E, F)$ com a topologia τ_β é completo.

No caso em que F é Banach e E normado obtem-se:

COROL 2. Se E é um espaço normado e F é um espaço de Banach, o espaço $L(E, F)$ com a norma (usual)

$$\|u\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F$$

é um espaço de Banach. Pois esta norma define a topologia τ_β

(1) $\mathcal{M}$ designa aqui o conjunto de todos os pontos limitados de M .

sobre $L(E, F)$.

B. CONJUNTOS LIMITADOS EM $L(E, F)(\tau_{\mathcal{M}}$)

1.12.7. TEOR. Se $\mathcal{M}$ é um conjunto de partes limitadas de E , para qualquer conjunto Φ de aplicações lineares contínuas de E em F , as seguintes condições são equivalentes:

(a) Φ é limitado para a topologia $\tau_{\mathcal{M}}$.

(b) Para cada vizinhança V de zero em F e cada $M \in \mathcal{M}$, existe $p > 0$ tal que $u(M) \subset pV$, $\forall u \in \Phi$.

(c) Se S é um sistema de seminormas que define a topologia de F , para cada $p \in S$ e cada $M \in \mathcal{M}$, existe $p > 0$ tal que $p[u(x)] \leq p$, $\forall x \in M$ e $\forall u \in \Phi$.

(d) Para cada $M \in \mathcal{M}$, o conjunto dos $u(x)$, tal que $u \in \Phi$ e $x \in M$, é limitado em F .

(e) Para cada vizinhança V de zero em F , o conjunto

$$\bigcap_{u \in \Phi} u^{-1}(V) \text{ absorve todos os } M \in \mathcal{M}.$$

DEM. A condição (b) resulta imediatamente de expressar que cada vizinhança de zero para $\tau_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{F}(M, V) \cap L(E, F) = \{u \in L(E, F) : u(VxM)\}$ absorve Φ . Por sua vez, resulta imediatamente de expressar que as seminormas $p_M(u) = \sup_{x \in M} p[u(x)]$, $M \in \mathcal{M}$ e $p \in S$, que definem a

topologia $\tau_{\mathcal{M}}$, são limitadas sobre Φ . A equivalência de (d) e (b) é imediata. Resta ver que (e) $\Leftrightarrow$ (b). Que a condição $u(M) \subset pV$

ou seja $M \subset u^{-1}(pV) = p u^{-1}(V)$, $\forall u \in \Phi$, é equivalente a

$$M \subset \bigcap_{u \in \Phi} p u^{-1}(V) = p \bigcap_{u \in \Phi} u^{-1}(V) \quad \text{--- e. f. d.}$$

21.
OBSERVAÇÃO. Expõe-se a condição (b) (ou (c)) dizendo que Φ é uniformemente limitado sobre cada $M \in \mathcal{M}$. Note-se que as condições (b), (c), (d) caracterizam os limitados de quaisquer subespaços localmente convexos de $F^E(\mathcal{T}_M)$; no entanto a condição (e) só é válida se Φ é formado de operadores lineares de E em F . Ele desempenhará um papel importante no que segue.

Recordemos que se chamamos tubo num espaço localmente convexo E a qualquer conjunto $T \subset E$ absolutamente convexo, fechado e absorvente e que E se diz totamente se todo o tubo é vizinhança de zero. Recorde-se ainda que todo o espaço metrizable completo (em particular, Banach) é totamente.

Um conjunto $\Phi \subset L(E, F)$ diz-se simplesmente limitado se é limitado para a topologia da convergência simples τ_s , e equivale a dizer em virtude de (c) que para cada $x \in E$, o conjunto $\Phi(x) = \{u(x) : u \in \Phi\}$ é limitado em F . De 1.12.7.(c) resulta imediatamente:

1.12.8. TEOR. Um conjunto $\Phi \subset L(E, F)$ é simplesmente limitado se e só se para cada vizinhança V de zero fechada e absolutamente convexa em F , $\bigcap_{u \in \Phi} u^{-1}(V)$ é um tubo em E .

Por que sendo V absolutamente convexa e fechada, os conjuntos $u^{-1}(V)$ são também absolutamente convexos e fechados, ~~ou seja, são tubos~~, e em virtude de (c) a condição de Φ ser limitado é equivalente à de $\bigcap_{u \in \Phi} u^{-1}(V)$ ser absorvente.

20
COROL. 1. Se E é um espaço limitado e $\mathcal{M}$ é um conjunto de partes limitadas de E , todo o conjunto $\Phi \subset L(E, F)$ simplesmente limitado é limitado para $\tau_{\mathcal{M}}$.

Com efeito, para cada vizinhança V de zero em F absolutamente convexa e fechada $\bigcap_{u \in \Phi} u^{-1}(V)$ sendo um local é vizinhança de zero em E e absorve portanto qualquer $M \in \mathcal{M}$.

O Corolário 1 pode-se enunciar dizendo que se E é limitado todo o conjunto $\Phi \subset L(E, F)$ simplesmente limitado é uniformemente limitado sobre cada parte limitada M de E .

Tem-se, em particular, o seguinte resultado da Teoria da Terceira dos espaços normados que se chama Teorema da Limitação Uniforme:

COROL. 2 (Teo. da Limitação Uniforme). Se E é um espaço de Banach e F é um espaço normado, todo o conjunto Φ de aplicações lineares contínuas de E em F que é simplesmente limitado é uniformemente limitado sobre a bola de raio 1 de E .

Por outras palavras, se vale para cada $x \in E$, $\sup_{u \in \Phi} \|u(x)\| < +\infty$,
 também $\sup_{u \in \Phi, \|x\| \leq 1} \|u(x)\| < +\infty$.

Como um conjunto limitado numa topologia é também limitado nas topologias menos finas, do Corolário 1

resulta que se E e' limitado, os limitados de $L(E, F)$ são os mesmos
para todas as DB-topologias tais que $UDB = E$.

Esta propriedade em geral e' falsa; ele no entanto e' verdadeira
 se E e' separado e quase completo. Um espaço localmente
 convexo E diz-se quase completo se toda a parte limitada e
fechada de E e' completa.

(Fácilmente se verifica que um espaço localmente convexo
 metrizable (em particular, normado), que e' quase completo
 e' completo)

Para estabelecer este resultado vamos estabelecer o seguinte
 lema:

1.12.9 TEOR. Se E e' separado e M e' um conjunto de
partes limitadas de E absolutamente convexas e localmente
sequencialmente completas, todo o conjunto $\Phi \subset L(E, F)$
simplesmente limitado e' limitado para T_M .

Como, para cada vizinhança V de zero em F , absolutamente
 convexa e fechada, $\bigcap_{u \in \Phi} u^{-1}(V)$ e' um línel (Ten. 1.12.81),

bastará provar o seguinte lema:

1.12.10. L E M A. Se E e' um espaço localmente convexo separado,
todo o línel T de E absorve qualquer parte M de E absoluta-
mente convexa ^{limitada} e sequencialmente completa.

DEM. Considere-se o subespaço vetorial E_M de E gerado por
 M ; e' fácil ver que M e' absorvente em E_M . Assim,

a norma de Minkowski, $\|x\|_M = \inf\{p > 0 : x \in pM\}$, $x \in E_M$, e' uma
seminorma sobre E_M e como M e' limitada e' uma norma (verifi-
ficadas imediatas). Vamos supor E_M munido desta norma. No-
te-se que se tem, para cada $p > 0$,

$$B_{\| \cdot \|_M}(0, p) \subset pM \subset D_{\| \cdot \|_M}(0, p)$$

de modo que os conjuntos pM formam um sistema funda-
mental de vizinhanças de zero em E_M . ^{Portanto} Vamos ~~aproveitar~~ ver que

- (α) E_M e' um espaço de Banach, portanto, completo; e
- (β) a topologia de E_M e' mais fina que a induzida por E .

Vamos provar primeiro (β). Seja V vizinhança de zero
em E , como M e' limitada, existe $p > 0$ tal que $V \supset pM$
e, portanto, $V \cap E_M \supset pM$, o que prova que $V \cap E_M$ e' vizinhança
de zero em E_M .

Para provar (α) considere-se uma sucessão de Cauchy x_n em
 E_M ; como x_n e' limitada, existe $n > 0$ tal que $\| \frac{x_n}{n} \|_M < 1$;

e, portanto, $\frac{x_n}{n} \in M$, $\forall n$. Mas em virtude de (β), $\frac{x_n}{n}$ e'
sucessão de Cauchy em E , e como M e' sequencialmente
completa, segue-se que $\frac{x_n}{n}$ converge para um ponto $\frac{x}{n} \in M$,

ou seja a topologia de E e' mais fina que a induzida por E_M .
Para acabar a demonstração de (α), vamos ver que
 $x_n \rightarrow x$ (note que $x \in E_M$) na topologia de E_M . Ora, para
cada $\delta > 0$, existe p tal que $\| x_n - x_m \|_M < \delta$, $\forall n, m \geq p$;

mas este condutor vem $\frac{x_m}{\delta} - \frac{x_m}{\delta} \in M$ e tomando o limite em E com m fixo e tendo em conta que M é sequencialmente fechado em E , vem $\frac{x}{\delta} - \frac{x_m}{\delta} \in M$ ou $x - x_m \in \delta M$ e, portanto, $\|x - x_m\|_M \leq \delta$, $\forall m \geq p$.

~~Portanto~~ ^{Agora} é fácil estabelecer o lema: Dado um triângulo T em E , de (B) resulta que $T \cap E_M$ é limitado em E_M ; mas como E_M é limitado, M é absorvido por $T \cap E_M$ e, portanto, por T . c.q.d.

Do teorema 1.12.9 resulta imediatamente:

COROL. 1. Se E é separado, os conjuntos limitados em $L(E, F)$ são os mesmos para todas as topologias τ_M tais que M é um conjunto de pontos limitados de E absolutamente convexos e seu complemento ~~de E~~ $\cup M = E$.

Daque vem também o resultado já anunciado:

COROL. 2. Se E é separado e quase completo, os conjuntos limitados em $L(E, F)$ são os mesmos para todas as topologias τ_M em que M é um conjunto de pontos limitados de E tal que $\cup M = E$.

Basta ver que $\tau_M = \tau_{M'}$ em que M' é formado pelos envoltos dos conjuntos fechados dos conjuntos de M e que tais conjuntos são completos, visto serem limitados e fechados e E é quase completo. c.q.d.

C. CONJUNTOS EQUICONTÍNUOS EM $L(E, F)$.

Vamos começar por estabelecer a seguinte caracterização para os conjuntos equicontínuos de aplicações lineares contínuas de E em F :

1.12.11. TEOR. Para qualquer conjunto $\Phi \subset L(E, F)$ são equivalentes:

- (a) Φ é equicontínuo;
- (b) Φ é equicontínuo no ponto zero;
- (c) Para qualquer vizinhança V de zero em F , o conjunto $\bigcap_{\mu \in \Phi} \mu^{-1}(V)$ é vizinhança de zero em E .

DEM. (a) $\Rightarrow$ (b) imediato; (b) $\Rightarrow$ (a). A condição (b) é equivalente a existir uma única vizinhança V de zero em F , tal que $\mu(W) \subset V, \forall \mu \in \Phi$; tomando
~~uma~~ vizinhança V de zero em F , ~~existe~~ uma vizinhança W de zero em E tal que $\mu(W) \subset V, \forall \mu \in \Phi$; tomando um ponto qualquer $x_0 \in E$, e tendo em conta que μ é linear, de condições anteriores vem $\mu(x_0 + W) = \mu(x_0) + \mu(W) \subset \mu(x_0) + V$, o que prova que Φ é equicontínuo em x_0 . Para a equivalência (b) $\Leftrightarrow$ (c), basta ver que a condição $\mu(W) \subset V$, ou seja $W \subset \mu^{-1}(V), \forall \mu \in \Phi$, é equivalente a $W \subset \bigcap_{\mu \in \Phi} \mu^{-1}(V)$.

Da condição (c) e de 1.12.7(c) resulta imediatamente:

COROL. 1. Se $\mathcal{M}$ é um conjunto de pontos limitados de E , onde a parte equicontínua de $L(E, F)$ é limitada para a topologia $\tau_{\mathcal{M}}$.

A afirmação é falsa; tem-se, no entanto,

COROL. 2. Se E é totalmente limitado, todo o conjunto Φ de aplicações lineares contínuas de E em F que é totalmente limitado e equicontínuo.

Em efeito, para cada vizinhança V de zero em F absolutamente convexa e fechada, $\bigcap_{\phi \in \Phi} \phi^{-1}(V)$ é um círculo em E e é, portanto, vizinhança de zero.

Das corolários 1 e 2 resulta que se E é totalmente limitado e $\mathcal{M}$ é um conjunto de hastes limitadas de E tal que $\bigcup \mathcal{M} = E$, por equicontinuidade, para quaisquer $\Phi \subset L(E, F)$: Φ é equicontínuo, Φ é totalmente limitado para $\mathcal{O}_p$.

Recordemos que pelo primeiro teorema de Ascoli, ..., se $\Phi \subset L(E, F)$ é equicontínuo, a sua aderência $\overline{\Phi}$ em F^E para a topologia de convergência simples é equicontínua; se além disso F é separado, de 1.12.3, resulta que $\overline{\Phi} \subset L(E, F)$. Temos assim:

1.12.12. TEOR. Se $\Phi \subset L(E, F)$ é equicontínuo, a sua aderência para a topologia de convergência simples em $L(E, F)$ é equicontínua e coincide com a aderência de Φ para a topologia de convergência simples em F^E se F é separado.

Recordemos ainda que em virtude do segundo teorema de Ascoli, ..., se $\Phi \subset L(E, F)$ é equicontínuo, em vez de em

φ as topologias da convergência simples e da convergência compacta.
Combinando com os resultados anteriores, obtem-se o seguinte
Teorema bastante importante nas aplicações à Análise Funcional:

1.12.13. TEOR. (BANACH-STEINHAUS). Suponhamos que E
é limitado e F é separado e seja $\{u_n\}$ uma sequência de aplicações
lineares contínuas de E em F que converge simplesmente para
uma função $u: E \rightarrow F$. Então: (a) u é linear e contínua;
(b) $u_n \rightarrow u$ uniformemente sobre cada compacto de E.

DEM. Como, para cada $x \in E$, $u_n(x) \rightarrow u(x)$, $u_n(x)$ é limitada
em F e portanto $\{u_n\}$ é simplesmente limitada. Do Corolário
2 de 1.12.11 resulta que $\{u_n\}$ é equicontínua; Como
 u pertence à aderência $\overline{\{u_n\}}$ de $\{u_n\}$ em F^E ^{para ϕ_2} $\{u_n\} \subset L(E, F)$
mas que F é separado (Ten. anterior) segue-se que $u \in L(E, F)$
o que prova (a). Para (b) basta aplicar o seguinte Teorema
de Ascoli a $\{u_n\}$ que é ^{em compacto} equicontínuo. c.q.d.

OBS. O Teorema de Banach-Steinhaus é falso para
redes de aplicações lineares contínuas simplesmente
convergentes em F^E , e' no entanto relacionada com
a hipótese adicional de a rede além de ^{simplesmente} convergente
ser ^{simplesmente} limitada

Para terminar este estudo sobre pontos equicontínuos de
 $L(E, F)$ vamos estabelecer o seguinte resultado que será
de usado adiante:

1.12.14. TEOR. Se F e' quase completo e separado e M e' um conjunto de pontos limitados de E tal que $\bigcup M = E$, entao, no espaco $L(E, F)(\tau_M)$ todo o conjunto Φ que e' limitado e fechado e' completo.

DEM. Considere-se uma rede de Cauchy μ_j em Φ para a topologia τ_M . Como τ_M e' mais fina que τ_S , ~~transmissao de~~ ~~hipoteses~~, μ_j e' tambem rede de Cauchy para τ_S e, portanto, ~~converge~~ ~~para~~ para cada $x \in E$, $\mu_j(x)$ e' rede de Cauchy em F . Como F e' limitado para τ_S esta ser equicontinua, segue-se, o conjunto $\phi(x) = \{ \mu(x) : \mu \in \Phi \}$ e' limitado em F , a sua aderencia e' portanto um conjunto compacto, e como contem os pontos $\mu_j(x)$ que $\mu_j \rightarrow \mu$ ~~daí resulta, que F e' quase completo, que $\mu_j(x) \rightarrow \mu(x)$ em F .~~ Defina-se assim uma funcao $\mu : E \rightarrow F$ que e' linear continua, poro μ e' na aderencia de Φ para a topologia de convergencia simples, que como se viu, esta contida em $L(E, F)$. Resta agora provar que $\mu_j \rightarrow \mu$ em $L(E, F)(\tau_M)$, poro para isso, ~~para~~ $\mu \in \Phi$, note Φ e' fechado neste espaco. Que dada uma vizinhanca V de zero fechada em F e um conjunto $M \in M$, ~~existe~~ existe um indice j_0 tal que

$$\mu_j(x) - \mu(x) \in V, \quad \forall j, j \geq j_0, \quad \forall x \in M.$$

e iniciando o limite com j fixo tem $\mu_j(x) - \mu(x) \in V$, $\forall j \geq j_0$ e $\forall x \in M$, o que prova que $\mu_j \rightarrow \mu$ uniformemente sobre M . C. q. d.

2. DUALIDADE.

2.1. SISTEMAS DUAIS. Sejam E e F espaços vetoriais e considere-se uma forma bilinear $\langle x, y \rangle$ sobre $E \times F$, isto é, uma função $E \times F \rightarrow K$ tal que, para cada y fixado em F , $x \rightarrow \langle x, y \rangle$ é uma forma linear sobre E e, para cada x fixado em E , $y \rightarrow \langle x, y \rangle$ é uma forma linear sobre F . Diz-se que E e F constituem uma dualidade ou um sistema dual $\langle E, F \rangle$ (em relação a $\langle x, y \rangle$) se as condições seguintes são verificadas:

- (D1) Para cada $y \neq 0$ em F , existe $x \in E$ tal que $\langle x, y \rangle \neq 0$.
- (D2) Para cada $x \neq 0$ em E , existe $y \in F$ tal que $\langle x, y \rangle \neq 0$.

EXEMPLOS 1. Se E é um espaço vetorial e E^* o seu dual algébrico (espaço das formas lineares sobre E), define-se uma dualidade $\langle E, E^* \rangle$ em relação a forma bilinear canónica sobre $E \times E^*$: $\langle x, y \rangle = y(x)$. Com efeito, (D1) é verificada por desmascar de forma linear $\neq 0$; quanto a (D2) note-se que qualquer $x \neq 0$ em E pertence a uma base e existe, portanto, $y \in E^*$ tal que $y(x) = 1 \neq 0$.

2. Um espaço localmente convexo separado E e o seu dual topológico E' (espaço das formas lineares contínuas sobre E) constituem um sistema dual $\langle E, E' \rangle$ em relação à restrição de $\langle x, y \rangle = y(x)$ a $E \times E'$. (D1) é verificada como no caso anterior e (D2) resulta do teorema de Hahn-Banach (corol. de 1.5.2).

Se $\langle E, F \rangle$ é um sistema dual, associando a cada $y \in F$ a forma linear $x \rightarrow \langle x, y \rangle$ sobre E , obtém-se uma aplicação linear $F \rightarrow E^*$ que é injetora, em virtude de (D1) ($y \neq 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle \neq 0$).

$\forall x \in E$), e permuta, portanto, identifica F com um subespaço de E^* . Com esta identificação, tem-se $\langle x, y \rangle = y(x)$, $\forall x \in E$, $\forall y \in F$, isto é, a forma bilinear que define a dualidade $\langle E, F \rangle$ é a restrição a $E \times F$ da forma bilinear canônica sobre $E \times E^*$ (Exemplo 1).

De modo análogo, fazendo corresponder a cada $x \in E$ a forma linear $y \rightarrow \langle x, y \rangle$ sobre F , obtém-se uma aplicação linear $E \rightarrow F^*$ que é injetora, em virtude de (D2), e permuta, portanto, identifica E com um subespaço de F^* . Com esta identificação tem-se $\langle x, y \rangle = x(y)$, $\forall x \in E$ e $\forall y \in F$.

No que segue vamos considerar sempre em qualquer sistema dual $\langle E, F \rangle$ cada um dos espaços E, F como subespaço do dual algébrico do outro, de acordo com as identificações precedentes.

Note-se ainda que dada a simetria de $\langle E, F \rangle$ as definições e teoremas relativos a um dos espaços E e F convertem-se em definições e teoremas relativos ao outro trocando simplesmente E com F .

2.2. TOPOLOGIAS FRACAS. Dado um sistema dual $\langle E, F \rangle$, a menor σ -álgebra das topologias sobre E que tornam contínuas as formas lineares que pertencem a F chama-se topologia fraca (definida pela dualidade) e representa-se por $\sigma(E, F)$. Do mesmo modo se define a topologia fraca $\sigma(F, E)$, trocando os papéis de E e F .

As propriedades relativas às topologias fracas são muitas e semelhantes com o adjetivo "fraco" ou o advérbio "fracamente". Assim $x_j \rightarrow 0$ fracamente em E , significa que $x_j \rightarrow 0$ na topologia fraca $\sigma(E, F)$.

A cada $y \in F$ corresponde uma seminorma $x \rightarrow |\langle x, y \rangle|$ sobre E (é o valor absoluto da forma linear y), e é fácil ver que $\sigma(E, F)$ é a interseção

a topologia localmente convexa sobre E definida por estas seminormas.

Assim, uma rede $x_j \rightarrow 0$ em E , precisamente, se $\langle x_j, y \rangle \rightarrow 0$, $\forall y \in F$.

Desta propriedade resulta imediatamente que $\sigma(E, F)$ é idêntica à topologia da convergência pontual (E como subespaço de F^*) ou seja é idêntica à topologia induzida em E pelo espaço produto $E \times F$. Como esta topologia é separada, segue-se que $\sigma(E, F)$ é separada; pode-se também obter esta propriedade como consequência directa de (D2): para cada $x \neq 0$, existe $y \in F$ tal que $|\langle x, y \rangle| \neq 0$.

(OBSERVAÇÕES 1. Se E é um e.l.c. separado, a topologia para $\sigma(E, E')$ (definida pela dualidade $\langle E, E' \rangle$) é o menor fina para a topologia dada em E . $\sigma(E', E)$ é a topologia da convergência pontual e o mesmo acontece, claro, com $\sigma(E, E')$ tomando E como espaço de formas lineares sobre E' .

2. Se E é um espaço vectorial, $\sigma(E, E^*)$ tem como formas lineares sobre E de modo que E^* é o dual topológico de $E(\sigma(E, E^*))$.

3. Se $\langle E, F \rangle$ é um sistema dual e F_1 é um subespaço de F em dualidade com E , para restringer de $\langle x, y \rangle$ a $E \times F_1$, se é imediato ver que $\sigma(E, F_1)$ é menor fina que $\sigma(E, F)$ e que $\sigma(F_1, E)$ é a topologia induzida em F_1 por $\sigma(F, E)$.

2.2.1. TEOR. Se $\langle E, F \rangle$ é um sistema dual, uma forma linear φ sobre E é contínua para $\sigma(E, F)$ se e só se $\varphi \in F$.

[Isto significa que F é o dual topológico de $E(\sigma(E, F))$ e também (tomando E como F) que E é o dual topológico de $F(\sigma(E, F))$. Por outras palavras, num sistema dual qualquer $\langle E, F \rangle$, esta sempre tem os espaços E, F é o dual do outro relativo à topologia para.

DE M. Da definição resulta imediatamente que se $\varphi \in F$, φ é fina.

mente contínua. Inversamente, se φ é contínua para $G(E, F)$ de 1.4.2 (d) resulta que existem $y_1, \dots, y_p \in F$ e $M > 0$ tais que

$$|\varphi(x)| \leq M \cdot \sup_{1 \leq j \leq p} |y_j(x)|, \quad \forall x \in E.$$

Tem-se assim $\varphi(x) = 0$, quando $y_1(x) = \dots = y_p(x) = 0$. Vamos ver que isto implica que φ é combinação linear de $y_1, \dots, y_p$ e que, portanto, $\varphi \in F$. Pode-se supor sem perda de generalidade que as formas $y_1, \dots, y_p$ são linearmente independentes. Considere-se a aplicação $\Phi: E \rightarrow K^{p+1}$ assim definida

$$\Phi(x) = (y_1(x), \dots, y_p(x), \varphi(x)).$$

Φ não é sobrejetiva, de contrária existência $x \in E$ tal que $y_1(x) = \dots = y_p(x) = 0$ e $\varphi(x) = 1$, o que é contra a hipótese. Existe então um hiperplano de K^{p+1} que contém $\Phi(E)$ e este hiperplano é representado por uma equação da forma $\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_{p+1} \xi_{p+1} = 0$, em que $\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1} \in K$ e não são todos nulos. Assim, temos, para cada $x \in E$, $\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_p y_p(x) + \alpha_{p+1} \varphi(x) = 0$, o que mostra que $y_1, \dots, y_p, \varphi$ são linearmente dependentes e. q. d.

COROLÁRIO 1. Se E é um espaço localmente convexo separado, uma forma linear sobre E é contínua sse é localmente contínua.

COROLÁRIO 2. Se E é um espaço localmente convexo separado, um subconjunto convexo $A \subset E$ é fechado sse é localmente fechado.

COROLÁRIO 3. Se $\langle E, F \rangle$ é um sistema dual e F_1 é um subespaço de F em dualidade com E (para a restrição de $\langle x, y \rangle$ a $E \times F_1$),

$$G(E, F) = G(E, F_1) \text{ sse } F = F_1.$$

Assim, se $F_1 \neq F$, $G(E, F_1)$ é verdadeiramente menor que $G(E, F)$ (OBS. 3).

2.3. POLARES. Se $\langle E, F \rangle$ é um sistema dual e $A \subseteq E$, chama-se polar de A e representa-se por A° ao conjunto dos $y \in F$ que verificam a relação $|\langle x, y \rangle| \leq 1$, $\forall x \in A$. De modo análogo se define o polar de uma parte A de F . Da definição resultam imediatamente as propriedades seguintes:

- (1) $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \supseteq B^\circ$.
- (2) Se λ é um escalar $\neq 0$, $(\lambda A)^\circ = \lambda^{-1} A^\circ$.
- (3) Se (A_i) é uma família de partes de E , $(\bigcup_i A_i)^\circ = \bigcap_i A_i^\circ$.

Da definição resulta também que, para cada $x \in E$, $\{x\}^\circ$ é a hipersuperfície de raio 1 para a seminorma $y \rightarrow |\langle x, y \rangle|$ sobre F e é, portanto, um conjunto absolutamente convexo e fracamente fechado em F . Em geral:

- (4) Para qualquer $A \subseteq E$, A° é absolutamente convexo e fracamente fechado em F ,

Por, em virtude de (3), $A^\circ = \bigcap_{x \in A} \{x\}^\circ$.

Chama-se bipolar de um conjunto $A \subseteq E$, ao conjunto $A^{\circ\circ} = (A^\circ)^\circ$ (ou bip , o polar do polar de A). Ver-se imediatamente que

$$A \subseteq A^{\circ\circ}.$$

2.3.1. TEOREMA DOS BIPOLARES. Se $\langle E, F \rangle$ é um sistema dual, para qualquer $A \subseteq E$, $A^{\circ\circ}$ é o envólucro absolutamente convexo fechado para $G(E, F)$ de A .

DEM. Designemos por A' o envólucro absolutamente convexo fracamente fechado de A em E . De (4) resulta imediatamente que

$A' \subset A^{\circ\circ}$. Resta então provar que $A^{\circ\circ} \subset A'$ ou, o que é equivalente, para cada $x_0 \in E$, $x_0 \notin A' \Rightarrow x_0 \notin A^{\circ\circ}$. Ora se $x_0 \notin A'$, em virtude de de ... existe em E um hiperplano real H fracamente fechado que separa x_0 e A' . Em virtude de 2.2.1, H é definido por uma equação da forma $\operatorname{Re} y(x) = \operatorname{Re} \langle x, y \rangle = 1$, em que $y \in F$, e $\|y\| = 1$ e y é ortogonal a A' . Consideremos:

(i) $\operatorname{Re} \langle x_0, y \rangle > 1$; (ii) $\operatorname{Re} \langle x, y \rangle < 1, \forall x \in A'$.

A cada $x \in A'$ $\|x\| = 1$ associa-se um escalar ω_x tal que $|\omega_x| = 1$ e $\langle x, y \rangle = \omega_x \operatorname{Re} \langle x, y \rangle = \operatorname{Re} \langle \omega_x x, y \rangle$; como $\omega_x x \in A'$, visto que A' é $\mathbb{K}$ -linear, de (ii) vem $|\langle x, y \rangle| \leq 1$, donde se conclui que $y \in A^{\circ\circ} \subset A'$. Mas em virtude de (i), $|\langle x_0, y \rangle| > 1$ e, portanto, $x_0 \notin A^{\circ\circ}$. c.q.d.

COROL. 1. Se $A \subset E$ é absolutamente convexo, $A^{\circ\circ}$ é a aderência de A para $\sigma(E, F)$; Se $A \subset E$ é absolutamente convexo e fechado para $\sigma(E, F)$, $A^{\circ\circ} = A$.

COROL. 2. Se (A_i) é uma família de conjuntos absolutamente convexos fracamente fechados em E , $(\bigcap_i A_i)^{\circ}$ é o envoltório absolutamente convexo e fracamente fechado em F de $\bigcup_i A_i^{\circ}$.

Tem-se, com efeito, $\bigcap_i A_i = \bigcap_i A_i^{\circ\circ} = (\bigcup_i A_i^{\circ})^{\circ}$ em virtude de (3), donde $(\bigcap_i A_i)^{\circ} = (\bigcup_i A_i^{\circ})^{\circ\circ}$. c.q.d.

Se $\langle E, F \rangle$ é um sistema dual, dois elementos $x \in E$ e $y \in F$ dizem-se

ortogonais se $\langle x, y \rangle = 0$. Se $M \subset E$, o conjunto $\{y \in F : \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in M\}$ é um subespaço de F que se chama ortogonal de M e se representa por $M^\perp$.

Se M é subespaço de E , tem-se $M^\perp = M^{\circ\perp}$, portanto, $M^\perp$ é um subespaço de F fracamente fechado. Com efeito, é óbvio que $M^\perp \subset M^{\circ\perp}$; inversamente, se $y \in M^{\circ\perp}$, tem-se $\forall x \in M$ e qualquer inteiro $n > 0$, $|\langle nx, y \rangle| \leq 1$ ou $|\langle x, y \rangle| \leq \frac{1}{n}$ donde, dada a arbitrariedade de n , $\langle x, y \rangle = 0$ o que prova que $y \in M^\perp$.

Assim, de 2.32, Corol. 1, resulta:

Se M é subespaço de E , o biortogonal $M^{\perp\perp}$ é a aderência de M para $\sigma(E, F)$; se M é subespaço de E fechado para $\sigma(E, F)$, $M = M^{\perp\perp}$.

2.4. TRANSPOSTA DE UMA APLICAÇÃO LINEAR. Se E e E_1 são espaços vetoriais e $f: E \rightarrow E_1$ é linear, associando a cada forma linear $u: E_1 \rightarrow K$ a forma linear $u \circ f: E \rightarrow K$ obtem-se uma aplicação linear ${}^t f: E_1^* \rightarrow E^*$ que se chama transposta de f :

$$(1) \quad {}^t f(u) = u \circ f$$

ou, mais explicitamente,

$$(2) \quad {}^t f(u)(x) = u[f(x)], \quad \forall x \in E \text{ e } \forall u \in E_1^*.$$

2.4.1. TEOR. Se $\langle E, F \rangle$ e $\langle E_1, F_1 \rangle$ são sistemas duais, para qualquer aplicação linear $f: E \rightarrow E_1$ são equivalentes:

(a) ${}^t f(F_1) \subset F$ ou seja, para cada $y \in F_1$, $y \circ f \in F$.

(b) f é fracamente contínua, isto é, é contínua para as topologias fracas $\sigma(E, F)$ e $\sigma(E_1, F_1)$.

DEM. (a) $\Rightarrow$ (b). Com efeito se f é fracamente contínua, como cada $y \in F_1$ é fracamente contínua o mesmo acontece com $y \circ f$ e, portanto, $y \circ f \in F$ em virtude de 2.3.2. (a) $\Rightarrow$ (b). Se (a) se verifica de (2) deduz-se que para cada $y \in F_1$ e cada $x \in E$

$$(3) \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, {}^t f(y) \rangle$$

Assim se uma rede $x_j \rightarrow 0$ fracamente em E , $f(x_j) \rightarrow 0$ fracamente em F . c.q.d.

Notemos agora que a condição (a) significa que a restrição de ${}^t f$ a F_1 é uma aplicação linear de F_1 em F ; esta aplicação chama-se transposta de f em relação às dualidades $\langle E, F \rangle$ e $\langle E_1, F_1 \rangle$ e representa-se também por ${}^t f$ se não houver risco de confusão.

Vê-se assim que a transposta de uma aplicação linear $f: E \rightarrow E_1$ em relação às dualidades $\langle E, F \rangle$ e $\langle E_1, F_1 \rangle$ existe se e só se f é fracamente contínua. Note-se ainda que ${}^t f$ é definido por (3).

Tem-se, como consequência de 2.4.1:

COROL. Se E e E_1 são espaços localmente convexos separados, qualquer aplicação linear contínua $f: E \rightarrow E_1$ é fracamente contínua e tem portanto transposta ${}^t f: E'_1 \rightarrow E'$. "

Com efeito note-se em (a) verifica-se pois que se $y: E_1 \rightarrow K$ é uma forma linear contínua o mesmo acontece com $y \circ f: E \rightarrow K$.

Não teremos que seguir considerando-se sistemas duais $\langle E, F \rangle$,

$\langle E_1, F_1 \rangle$, $\langle E_2, F_2 \rangle$ e aplicações lineares $f: E \rightarrow E_1$, $g: E_1 \rightarrow E_2$.

~~fracamente contínuas~~ fracamente contínuas.

2.4.2. TEOR. (a) ${}^t f: F_1 \rightarrow F$ é fracamente contínua e ${}^t({}^t f) = f$.

(b) ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$.

(c) Para qualquer $A \subseteq E$, $f(A)^\circ = {}^t f^{-1}(A^\circ)$.

(d) Para qualquer $A \subseteq E_1$, absolutamente convexo e fracamente fechado, ${}^t f(A^\circ) = f^{-1}(A)^\circ$ (a aderência coincide em relação a $\sigma(F, E)$).

(e) $\text{Ker}({}^t f) = (\text{Im } f)^\perp$ e $\overline{\text{Im}({}^t f)} = (\text{Ker } f)^\perp$.

DEM. (a). Tomando uma sêde $y_j \rightarrow 0$ fracamente em F_1 , tem-se, para qualquer $x \in F$, $\langle x, {}^t f(y_j) \rangle = \langle f(x), y_j \rangle \rightarrow 0$, o que mostra que ${}^t f(y_j) \rightarrow 0$ fracamente em F e, portanto, ${}^t f$ é fracamente contínua. Assim, ${}^t({}^t f)$ existe e é óbvio que coincide com f . (b) É imediato. (c). Se $y \in f(A)^\circ$ tem-se, para qualquer $x \in A$, $|\langle f(x), y \rangle| \leq 1$ ou $|\langle x, {}^t f(y) \rangle| \leq 1$ e, portanto, ${}^t f(y) \in A^\circ$ ou seja $y \in {}^t f^{-1}(A^\circ)$. Reciprocamente, analogo a ${}^t f^{-1}(A^\circ) \Rightarrow y \in f(A)^\circ$. (d). Tem-se em virtude de (c) e (a) ${}^t f(A^\circ)^\circ = f^{-1}(A^{\circ\circ}) = f^{-1}(A)$ onde A é absolutamente convexo e fracamente fechado, $A = A^{\circ\circ}$. Da mesma maneira vem ${}^t f(A^{\circ\circ})^\circ = f^{-1}(A)^\circ$ ou seja ${}^t f(A)$ é absolutamente convexo, $\overline{{}^t f(A)} = f^{-1}(A)^\circ$ e, portanto, (e) é consequência imediata de (c) e (d).

2.6. TOPOLOGIAS DE CONVERGÊNCIA UNIFORME NUMA DUALIDADE. A.N.º

Que segue. Considera-se um sistema dual $\langle E, F \rangle$ de espaços vectoriais e designa-se por E_0 (resp. F_0) o espaço E (resp. F) com a topologia fraca $\sigma(E, F)$ (resp. $\sigma(F, E)$). Como usual, 2.2.1, F identifica-se com o dual de E_0 e E com o dual de F_0 .

$$F = (E_0)' = L(E_0, K), \quad E = (F_0)' = L(F_0, K).$$

Assim, a cada conjunto M de pontos de E fracamente limitados corresponde uma topologia τ_M sobre F (topologia da convergência uniforme em M). ^{que vem em 3.12}
 ~~Esta topologia~~ ^{esta topologia} é localmente convexa e é definida pelas seminormas $| \cdot |_M$:

$$(1) \quad |y|_M = \sup_{x \in M} | \langle x, y \rangle |, \quad M \in \mathcal{M} \text{ e } y \in F.$$

A topologia fraca $\sigma(E, F)$ é uma destas topologias, pertencendo à da convergência simples. De modo análogo a cada conjunto M de pontos de F fracamente limitados corresponde uma topologia τ_M sobre $E = (F_0)'$.

Em muitos casos interessa considerar o sistema dual $\langle E, F \rangle$ formado por um espaço localmente convexo E separável e o seu dual F' ; neste caso tem-se $E' = (E_0)'$, $E = (E'_0)'$, havendo a considerar topologias τ_M sobre E' (resp. sobre E) em que M é um conjunto de pontos de E' fracamente limitados. Há aqui no entanto que distinguir cuidadosamente as topologias que se referem à topologia ~~de~~ ^{de} E que se chama topologia inicial e que se referem à topologia fraca $\sigma(E, E')$. No entanto, como se verá adiante, conjuntos limitados são os mesmos para as duas topologias. Note-se ainda que um sistema dual de espaços vectoriais $\langle E, F \rangle$ se reduz a este caso, tomando para topologia inicial a a topologia fraca $\sigma(E, F)$.

No estudo que segue fazem-se aplicar os resultados de 3.12, onde costumam reformular alguns deles fazendo intervir a noção de separabilidade. O orden de ideias notamos já que, dados um sistema dual $\langle E, F \rangle$ e um conjunto M de pontos de E fracamente limitados, para o qual $M \in \mathcal{M}$, o polar M^0 é a bola de convergência uniforme $| \cdot |_M$:

$$M^0 = \{ y \in F : \sup_{x \in M} | \langle x, y \rangle | \leq 1 \}.$$

ε e ε' , portanto, vizinhanças de z em F para a topologia τ_m sobre F .

Tem-se, além disso:

2.6.1. TEOR. Se $\mathcal{M}$ é filtrante a' direita para a relação C e invariante ante as homotetias frontais (isto é, $M \in \mathcal{M}$ e $P > 0 \Rightarrow P M \in \mathcal{M}$),

os polos dos conjuntos de $\mathcal{M}$ formam um sistema fundamental de vizinhanças de z em $F(\tau_m)$.

DEM. Como $\mathcal{M}$ é filtrante a' direita para a relação C o mesmo acontece com o conjunto das summanas $\{y|M, M \in \mathcal{M}\}$, para a relação $\leq$. Assim, as bolas relativas a estas summanas, ou seja, os conjuntos $P M^0$, $P > 0$ e $M \in \mathcal{M}$, formam um sistema fundamental de vizinhanças de z em τ_m (cf. ...), mas dada a invariância de $\mathcal{M}$ com as homotetias frontais, cada uma destas bolas é o polo de um conjunto de $\mathcal{M}$: $(P M^0) = (P^{-1} M)^0$. c.q.d.

OBS. 1. Se $\mathcal{M}$ não verifica as condições do Teorema pode-se substituí-lo por outro que as verifica e produz a mesma topologia sobre F ; por exemplo, o conjunto $\mathcal{M}'$ das reuniões finitas de homotetias de raios > 0 de conjuntos de $\mathcal{M}$.

2. Os polos das partes finitas de E constituem um sistema fundamental de vizinhanças de z para a topologia fraca $G(F, E)$.

3. Se E é um espaço localmente conexo separado e E' o seu τ_m subespaço dual, pode-se aplicar o teorema anterior para as topologias τ_m sobre E' em que $\mathcal{M}$ é um conjunto de partes limitadas de E , por que todo o conjunto limitado em E é fracamente limitado. Adiante veremos que a recíproca é verdadeira: todo o conjunto fracamente limitado é limitado.

Como vimos em 1.12.7 há diferentes modos (equivalentes) de exprimir que um conjunto $\Phi \subset F = (E, \sigma)$ é limitado para uma topologia τ_π :

Φ é uniformemente limitado sobre cada $M \in \mathcal{M}$, ou seja, $\forall M \in \mathcal{M}$
 $\exists P > 0$, tal que $| \langle x, u \rangle | \leq P$, $\forall x \in M$ e $\forall u \in \Phi$.

Para cada vizinhança V de zero em K , $\bigcap_{u \in \Phi} u^{-1}(V)$ absorve todos os conjuntos de $\mathcal{M}$.

A última condição pode-se simplificar em termos finitos de bolas de polar. Para isso note-se que ela é verificada se o Φ é limitado quando V é a bola de raio 1 de K e, que neste caso, a interseção dos $u^{-1}(V)$ em que u percorre Φ é o polar Φ° :

$$(2) \quad \bigcap_{u \in \Phi} u^{-1}(V) = \Phi^\circ \text{ se } V = \{ \xi \in K : |\xi| \leq 1 \}.$$

Tem-se assim:

2.6.2. TEOR. Para quaisquer $\Phi \subset F$ ser equivalentes:

(a) Φ é limitado para τ_π ; (1)

(b) O polar Φ° absorve todos os conjuntos de $\mathcal{M}$.

OBS. Pode-se dar uma demonstração direta deste teorema sem recorrer a 1.12.7. Para isso, basta notar que Φ é limitado para τ_π se e só se cada $M \in \mathcal{M}$, M° absorve Φ e que este condição é equivalente a $M^{\circ\circ}$ e, portanto, M ser absorvido por Φ° .

De 2.6.2 resulta:

COROL. 1. $\Phi \subset F = (E, \sigma)$ é fracamente limitado se e só se o seu polar Φ° é um funil em E para a topologia para $\sigma(E, F)$.

3) $\mathcal{M}$ absorve sempre sobre todos os conjuntos de pontos fracamente limitados de E (ou de F conforme o caso).

Para o caso da dualidade $\langle E, E' \rangle$ em que E é um e.l.e. separável e E' o seu dual, tem-se

COROL. 2. Se E é totalmente limitado, todo o conjunto $\Phi \subset E'$ fraca-
mente limitado é limitado para qualquer topologia τ_{pr} sobre E' .

Basta ter em atenção (corol. 2 de 2.2.1) que todo o total em E (isto é, para a topologia fraca) é um total em E e portanto vizinhança de zero.

Este conteúdo é caso particular do conteúdo 1 de 1.12.8. De 1.12.9 resulta:

2.6.3. TEOR. Se E é um e.l.e. separável e $\mathcal{D}$ é um conjunto de partes de E absolutamente convexas limitadas e sequencia-
mente completas, para a topologia fraca $G(E, E')$, todo o conjun-

to $\Phi \subset E'$ fraca-
mente limitado é limitado na topologia τ_{pr} sobre E' .

Como consequência:

COROL. Se E é um e.l.e. separável e quase completo para a topologia fraca $G(E, E')$ todo o conjunto $\Phi \subset E'$ fraca-
mente limitado é limitado para qualquer topologia τ_{pr} .

B. PARTES EQUICONTÍNUAS DO DUAL. TEOREMA DE ALAOGU-BOURBAKI.

Continuamos a considerar um espaço localmente convexo separável E e o seu dual E' ; as partes equicontínuas de E' referem-se à topologia de E . De acordo com 1.12.10, um conjunto $\Phi \subset E'$ é equicontínuo sse é equicontínuo no ponto zero e, pela continuidade do mesmo fenómeno, Φ é equicontínuo sse para toda vizinhança V de

73
zero em K , $\bigcap_{u \in \Phi} u^{-1}(V)$ é vizinhança de zero em E . Mas isto aqui é

observação análoga à que conduziu ao Teorema 2.6.2: basta trocar u por u^{-1} quando V é a bola de raio 1 de K , neste caso (fórmula 2)

$$\bigcap_{u \in \Phi} u^{-1}(V) = \Phi^0 \quad \text{Tem-se assim (consequência de 1.12.11):}$$

2.6.4. TEOR. Para qualquer $\Phi \subseteq E'$ são equivalentes:

- (a) Φ é equicontínuo;
- (b) Φ é equicontínuo no ponto zero;
- (c) O hull Φ^0 é uma vizinhança de zero em E .

Como consequência de (c) (cf. Corol. 1 de 1.12.11), toda a parte equicontínua de E' é limitada para qualquer topologia G_m . A recíproca é verdadeira no caso em que E é limitado (Corol. 2 de 1.12.11); tem-se, portanto, o seguinte resultado mais preciso que caracteriza os espaços limitados:

2.6.5. TEOR. Se E é
um espaço localmente convexo separável, são
equivalentes:

- (1) E é limitado
- (2) Toda a parte do dual E' fortemente limitada é equicontínua.

DEM. (1) $\Rightarrow$ (2) imediata, cf. Corol. 2 de 1.12.11. (2) $\Rightarrow$ (1). Seja T um lin. de E , como T é absolutamente convex e fortemente fechado, do Teorema dos Endomorfismos resulta que $T = T^{00} = (T^0)^0$; mas em virtude de 2.6.2, Corol. 1, T^0 é fortemente limitado (em E') e, portanto, equicontínuo. Logo, de 2.6.4(c) segue-se que T^0 é vizinhança de zero em E . C.q.d.

Outra consequência importante 2.6.4 (e) é a seguinte:

2.6.6. TEOR. A topologia de um espaço localmente convexo separado E é idêntica à topologia da convergência uniforme nas partes equicontínuas do seu dual E' .

{ Por outras palavras, no sistema dual $\langle E, E' \rangle$ primado em E e l.e. separado e o seu dual, a topologia inicial de E é a topologia da convergência uniforme nas partes equicontínuas de E' .

DEM. Sejam $\mathcal{M}$ o conjunto das partes equicontínuas de E' . Trata-se de provar que a topologia τ dada em E é idêntica à topologia $\tau_{\mathcal{M}}$ sobre E (como dual de E'_0). Vê-se imediatamente que $\mathcal{M}$ verifica as condições de 2.6.1. e que, portanto, os pontos M^0 do conjunto $M \in \mathcal{M}$ formam um sistema fundamental de vizinhanças de zero para $\tau_{\mathcal{M}}$. Ora de 2.6.4 (e) resulta que cada um dos M^0 é vizinhança de zero para τ , assim τ é mais fina que $\tau_{\mathcal{M}}$. Inversamente, seja V uma vizinhança de zero para τ absolutamente convexa e fechada; em virtude de 2.1.2 corol 2, V é fracamente fechada e portanto (tenendo em atenção) $V^{00} = V$, mas como V^0 é parte equicontínua de E' (2.6.4.(e)) e por consequência V é vizinhança de zero para $\tau_{\mathcal{M}}$. c.q.d.

Vamos agora estabelecer outro resultado importante que se refere a Alzaoglu e Bourbaki:

2.6.7. TEOR (ALAOGUO - BOURBAKI). Se E é um espaço localmente convexo separado, toda a parte equicontínua Φ do dual E' é relativamente compacta para a topologia fraca $\sigma(E', E)$.

DEM. Considere-se o espaço K^E com a topologia de convergência simples que é idêntica ao espaço produto $\prod_{x \in E} K_x$, $K_x = K$, $\forall x \in E$. $\forall E'$ com a topologia fraca é subespaço (topológico) de K^E e, com isso em 1.12.12, a aderência de Φ para $\sigma(E', E)$ é idêntica à aderência $\bar{\Phi}$ de Φ em K^E . Por outro lado, toda Φ equicontínua é limitada para $\sigma(E', E)$ e, portanto, limitada no espaço K^E . Assim, para cada $x \in E$, o conjunto $\Phi(x) = \{y(x) : y \in \Phi\}$ (projeção de Φ na função $K_x = K$) é limitado e por consequência relativamente compacto em K . Logo, de $\Phi \subset \prod_{x \in E} \Phi(x)$, tem $\bar{\Phi} \subset \prod_{x \in E} \bar{\Phi}(x)$, e como $\prod_{x \in E} \bar{\Phi}(x)$ é compacto (por ser produto de compactos) segue-se que $\bar{\Phi}$ é compacto em K^E e fechado em E' para $\sigma(E', E)$. c.f.d.

Para ^{laudem} fazer a demonstração usando o terceiro teorema de Ascoli, 1.1.

Deste teorema e de 2.6.5 resulta que μE é finito e separado, para qualquer $\Phi \subset E'$, por equivalentes: Φ é equicontínua, Φ é limitado para a topologia fraca, Φ é relativamente fracamente compacto. Pode-se agora demonstrar, ~~por~~ o seguinte resultado que enunciaremos em cima:

2.6.8. TEOR. $K E$ é um espaço localmente convexo ~~separado~~, ^{quase} ~~separado~~ compacto $M \subset E$ por equivalentes: (a) M é limitado; (b) M é ~~fracamente~~ limitado.

DEM. E' o'bvio que $(a) \Rightarrow (b)$. Vejamos a implicacao $(b) \Rightarrow (a)$. Sejam $\mathcal{N}$ o conjunto das bolas abertas de E' . Como sabemos em 2.66, a topologia inicial de E e' identica a $\tau_{\mathcal{N}}$ e, portanto, a $\tau_{\mathcal{N}'}$ em que $\mathcal{N}'$ e' formado pelas envolturas absolutamente convexas fechadas para $\mathcal{G}(E', E)$ dos conjuntos de $\mathcal{N}$. Em virtude do teorema de Alaoglu-Bourbaki os conjuntos de $\mathcal{N}'$ sao compactos para $\mathcal{G}(E', E)$ e, portanto, completos para a topologia $\mathcal{G}(E', E)$ e ai se encaixa no teorema 2.63. c. q. d.

C. TOPOLOGIAS COMPATIVAS COM UMA DUALIDADE. TEOREMA DE Mackey - Arens.

Considere-se um sistema dual $\langle E, F \rangle$. Uma topologia localmente convexa separada τ sobre E diz-se compativel com a dualidade se $\mathcal{G}(E, E')$. F e' identico ao dual de $E(\tau)$, $F = (E(\tau))'$, ou seja, uma funcao linear sobre E e' continua para τ se pertence a F . De modo analogo, uma topologia localmente convexa separada τ sobre F e' compativel com a dualidade $\langle E, F \rangle$ se $E = (F(\tau))'$.

As topologias locais $\mathcal{G}(E, F)$ e $\mathcal{G}(F, E)$ sao compativels com a dualidade $\langle E, F \rangle$:
se E e' um espaco localmente convexo separado, a topologia inicial de E e' compativel com a dualidade $\langle E, E' \rangle$, com o'bvio.

Note-se ainda que da definicao da topologia local resulta imediatamente que dado um sistema dual $\langle E, F \rangle$, $\mathcal{G}(E, F)$ (resp. $\mathcal{G}(F, E)$) e' a topologia localmente convexa separada sobre E (resp. F) que e' a menor que e' compativel com a dualidade $\langle E, F \rangle$.

Antes de prosseguir, relembramos que $\mathcal{K}$ está nos exemplos de 2.6.1, ou $\mathcal{K}_m$, e é invariante para as homeotecias (o que é óbvio) e é filtrante à direita.

Para estabelecer, este último, vamos provar que se A e B são conjuntos absolutamente convexos e compactos mesmo e.l.e qualquer F , o mesmo acontece com $ac(A \cup B)$; claro que $ac(A \cup B)$ é absolutamente convexo. Resta então provar que é compacto. Considere-se ~~o~~ o conjunto

$\Delta = \{(\alpha, \beta) \in K \times K : |\alpha| + |\beta| \leq 1\}$ Δ é compacto de $\mathbb{R}^2$ logo é óbvio; e $\mathcal{K}_m$ $\Phi: F \times F \times K \rightarrow F$, assim definida: $\Phi(x, y, \alpha, \beta) = \alpha x + \beta y$;

Φ é contínua e como $ac(A \cup B) = \Phi(A \times B \times B)$ e $A \times B \times B$ é compacto, ^{segue-se que} $ac(A \cup B)$ é compacto. ~~Segue-se~~ Nos exemplos, ^{de acordo com 2.6.1}

para N° dos conjuntos $N \in \mathcal{K}$ constituem um sistema fundamental de vizinhanças de zero para a topologia $\tau_{\mathcal{K}}$ (sobre E).

Passemos à prova de que $\tau_{\mathcal{K}}$ é compatível com a dualidade. Seja F_1 o dual de $E(\tau_{\mathcal{K}})$; é óbvio que $F \subset F_1$ (pois $\sigma(E, F)$ é menor que $\sigma(E, F_1)$) e tudo o que resta então a provar que $F_1 \subset F$. Considere-se a dualidade, $\langle E, F_1 \rangle$. Se $u \in F_1$, o hiper $\{u\}^\circ$ nesta dualidade (que é o mesmo que na dualidade $\langle E, F \rangle$) é uma vizinhança de zero para $\tau_{\mathcal{K}}$, logo $\{u\}$ é equicontínuo (ten 2.6.6), e portanto, portanto, o hiper N° dos conjuntos $N \in \mathcal{K}$. Assim, tem-se, considerando sempre a dualidade $\langle E, F_1 \rangle$ $\{u\}^\circ \subset N^\circ$ e como $u \in \{u\}^\circ$, basta provar que $N^\circ \subset F$. Ora $N^\circ = \bar{N}$, para a topologia $\sigma(F_1, E)$, mas como N é compacto para $\sigma(F, E)$ e esta topologia (sobre F) é mais fina que $\sigma(F_1, E)$, N é compacto para $\sigma(F_1, E)$, logo $\bar{N} = N$ e, portanto, $N^\circ = N \subset F$. c.q.d.

Dado um sistema dual $\langle E, F \rangle$ chama-se topologia de Mackey sobre E e representa-se por $\tau(E, F)$ a topologia de convergência uniforme sobre o conjunto $\mathcal{B}$ de todos os subconjuntos de F absolutamente convexos e finitamente compactos. Do mesmo modo se define a topologia de Mackey $\tau(F, E)$. Do lema de Mackey-Arens resulta:

COROL. 1. A topologia de Mackey $\tau(E, F)$ é a mais fina das topologias localmente convexas sobre E compatíveis com a dualidade $\langle E, F \rangle$.

Como a topologia fraca $\sigma(E, F)$ é a menos fina compatível com a dualidade, segue-se que se uma topologia localmente convexa τ sobre E é compatível com a dualidade $\langle E, F \rangle$ tem

$$\sigma(E, F) \subset \tau \subset \tau(E, F).$$

Como todos os subconjuntos compactos são completos, de 2.6.3 e do lema de Mackey-Arens resulta o seguinte Corolário que generaliza 2.6.8:

COROL. 2. Se $\langle E, F \rangle$ é um sistema dual, os subconjuntos limitados são os mesmos para todos as topologias sobre E compatíveis com a dualidade.

Note-se ainda que o mesmo acontece com os subconjuntos absolutamente convexos fechados, com os envoltórios absolutamente convexos fechados, mas isto é consequência de --

2.7. TOPOLOGIAS FORTES. BIDUAL. ESPAÇOS SEMI-REFLEXIVOS E REFLEXIVOS

A. TOPOLOGIA FORTE.

✓ Considere-se um sistema dual $\langle E, F \rangle$. Chamamos topologia forte sobre E (induzida pela dualidade) e representamos por $\beta(E, F)$ a topologia da convergência uniforme sobre as partes de F globalmente limitadas (ou, o que dá no mesmo, limitadas para uma topologia sobre F compatível com a dualidade). A topologia $\beta(E, F)$ é entre a mais fina das topologias $\tau_{\mathcal{M}}$ em que $\mathcal{M}$ é um conjunto de partes de F globalmente limitadas. Define-se de modo análogo a topologia $\beta(F, E)$. O espaço E (resp. F) com a topologia forte é por vezes representado por E_{β} (resp. F_{β}).

As propriedades que se referem à topologia forte levam por vezes a indicadores "forte" ou "fortemente".

Em geral a topologia forte $\beta(E, F)$ (resp. $\beta(F, E)$) não é compatível com a dualidade; ela só é compatível com a dualidade se for idêntica à topologia de Mackey $\tau(E, F)$ (resp. $\tau(F, E)$).

Interessa especialmente considerar a dualidade $\langle E, E' \rangle$ definida por um espaço localmente convexo separável E e o seu dual E' . A topologia forte $\beta(E', E)$ (sobre o dual) é idêntica à topologia da convergência uniforme nas partes limitadas de E (Ten. 2.6.8). O dual E' com a topologia forte ou seja E'_{β} é muitas vezes referido como dual forte de E . Por sua vez a topologia forte $\beta(E, E')$ é mais fina que a topologia de E (topologia inicial) portanto, no entanto, em alguns casos coincide com ela. Tem-se, para este efeito, o seguinte lema:

Assim, pode-se identificar algebricamente E com um subespaço de E'' ; isto é, pode-se considerar $E \subset E''$ com $x = \bar{x}, \forall x \in E$.

C. ESPAÇOS SEMI-REFLEXIVOS E REFLEXIVOS Um espaço localmente convexo separado E diz-se semi-reflexivo se a imersão canônica $i: E \rightarrow E''$ é sobrejetiva, ou seja, se é um isomorfismo algébrico de E sobre E'' . (equivalente a dizer que toda a forma linear sobre E' fortemente contínua é definida por um elemento $x \in E$ ou ainda o que de outro modo, toda a forma linear sobre E' fortemente contínua é fracamente contínua). Neste caso pode-se identificar algebricamente E com E'' .

Se, considerando E'' com a topologia forte e E com a topologia dada, i é um isomorfismo retinhal topológico de E sobre E'' , E diz-se reflexivo. Assim, um espaço reflexivo é semi-reflexivo, ~~pois a imersão canônica é forte~~. Equivalente a dizer que E é semi-reflexivo e que quando se identifica E com E'' a topologia de E coincide com a topologia forte $\beta(E'', E') = \beta(E', E')$. Assim, de

2.7.1 vem imediatamente:

2.7.2. TEOR. Um espaço localmente convexo separado é reflexivo se e semi-reflexivo e tonelado.

COROL Todo o espaço de Banach semi-reflexivo é reflexivo.

(Adiante ver-se-á que isto é verdadeiro para os espaços normados. Assim, que temos os espaços normados mas a distingue espaços reflexivos de espaços semi-reflexivos.

Tem-se o seguinte teorema que caracteriza os espaços seminreflexivos:

2.7.3. TEOR. Se E e E' um espaço localmente convexo separado, são equivalentes:

(a) E e E' seminreflexivos;

(b) A topologia forte $\beta(E', E)$ (isto é dual) e compatível com a dualidade;

(c) O espaço E'_σ que se obtém munido E' com a topologia de Mackey $\tau(E', E)$ e totalmente limitado.

(d) Todo o ^{sub}conjunto de E limitado e relativamente compacto para $\sigma(E, E')$.

(e) E e E' quase completos para a topologia fraca $\sigma(E, E')$.

DEM. Ver Schaefer, Topological Vector Spaces.